STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

Colloquium Representaties van de draaiingsgroep en de Lorentzgroep

1963/64

o.l.v. Prof.dr. H.A. Lauwerier en Prof.dr. S.A. Wouthuysen

december 1964

Fl.10.--

Printed at the Mathematical Centre at Amsterdam,49,2nd Boerhaavestraat.
The Netherlands.

The Mathematical Centre, founded the 11th of February 1946, is a non - profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Scientific Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Colloquium Representaties van de draaiingsgroep en de Lorentzgroep

I. Representaties van eindige groepen

A.B. Paalman-de Miranda

Onder een representatie van een groep G verstaan we een homomorfe afbeelding M van G op een multiplicatieve groep van niet-singuliere $n \times n$-matrices. Dus een afbeelding M van G met de eigenschap

$$M(g_1)M(g_2) = M(g_1 g_2) \text{ en } M(g_1^{-1}) = [M(g_1)]^{-1}.$$

Het getal n heet de graad van de representatie. We zullen ons beperken tot matrices waarvan de elementen complexe getallen zijn.

Als S een niet-singuliere $n \times n$-matrix is, dan kunnen we uit een representatie M een nieuwe representatie $S^{-1}MS$ maken, gedefinieerd door

$$S^{-1}MS \; : \; g \to S^{-1}M(g)S \qquad g \in G.$$

Dat dit weer een representatie is volgt uit

$$S^{-1}M(g_1)S\; S^{-1}M(g_2)S = S^{-1}M(g_1)\; M(g_2)S = S^{-1}M(g_1 g_2)S.$$

Twee representaties M_1 en M_2 heten equivalent als er een S is met $M_1 = S^{-1}M_2S$. Notatie: $M_1 \sim M_2$.

Een representatie M heet unitair als iedere matrix M(g) unitair is, dus als $M(g)^+ = M(g)^{-1}$ voor alle $g \in G$. (A^+ is de complex geconjugeerde van de getransponeerde matrix van A.)

Stelling 1. Iedere representatie van een eindige groep is equivalent met een unitaire representatie.

Bewijs. Zij M een representatie van G.

Stel $H = \sum_{g_j \in G} M^+(g_j)\, M(g_j)$.

Dan is H positief definiet hermitisch, daar iedere term het is en H is dus te schrijven als T^+T met T triangulair. T is niet singulier, daar H niet singulier is. Verder geldt $M^+(g)\,H\,M(g) = H$, $g \in G$.

Immers $M^+(g) \cdot \left\{ \sum_{g_j \in G} M^+(g_j)\,M(g_j) \right\} M(g) = \sum_{g_j \in G} M^+(g_j g)\,M(g_j g) =$

$$\sum_{g_j \in G} M^+(g_j)\,M(g_j) = H.$$

De representatie TMT^{-1} is unitair, daar

$$(T\,M(g)T^{-1})^+(T\,M(g)T^{-1}) = T^{-1+}M^+(g)T^+T\,M(g)T^{-1} =$$

$$T^{-1+}M(g)^+H\,M(g)T^{-1} = T^{-1+}HT^{-1} = T^{-1+}T^+TT^{-1} = I\ .$$

Zijn M_1 en M_2 2 representaties van de graad n en m, dan verstaan we onder de directe som M_1+M_2 de representatie van de graad n+m gegeven door

$$M_1+M_2(g) = \begin{pmatrix} M_1(g) & 0 \\ 0 & M_2(g) \end{pmatrix} .$$

Een representatie heet <u>reducibel</u> als zij equivalent is met een directe som van representaties van lagere graad, dus als M(G) als groep van lineaire transformaties van een n-dimensionale lineaire ruimte L_n twee echte invariante deelruimten L_n^1 en L_n^2 bezit met $L_n = L_n^1 + L_n^2$.

Een representatie heet <u>halfreducibel</u> als zij equivalent is met een representatie M van de vorm

$$M(g) = \begin{pmatrix} M_1(g) & A(g) \\ 0 & M_2(g) \end{pmatrix} , \text{ waarbij}$$

$M_1(g)$, $A(g)$, $M_2(g)$ respectievelijk $k \times k$, $k \times (n-k)$ en $(n-k) \times (n-k)$ matrices zijn voor alle $g \in G$. $0 < k < n$.

Dus als M(G) een echte invariante deelruimte bezit.

<u>Stelling 2</u>. Elke half-reducibele representatie van een eindige groep is reducibel.

<u>Bewijs.</u> Stel $M(g) = \begin{pmatrix} M_1(g) & A(g) \\ 0 & M_2(g) \end{pmatrix}$.

Dan is er volgens st.1 een triangulaire T met $T\,M(g)T^{-1}$ unitair. Daar T en T^{-1} unitair zijn, heeft ook $\tilde{M}(g) = T\,M(g)T^{-1}$ dezelfde blokvorm.

$$\tilde{M}(g) = \begin{pmatrix} \tilde{M}_1(g) & \tilde{A}(g) \\ 0 & \tilde{M}_2(g) \end{pmatrix} \quad \text{en}$$

$$\tilde{M}(g^{-1}) = \left[\tilde{M}(g)\right]^{-1} = \left[\tilde{M}(g)\right]^{+} = \begin{pmatrix} \tilde{M}_1^{+}(g) & 0 \\ \tilde{A}^{+}(g) & \tilde{M}_2^{+}(g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{M}_1(g^{-1}) & \tilde{A}(g^{-1}) \\ 0 & \tilde{M}_2(g^{-1}) \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt $\tilde{A}(g)^{+} = 0 \Rightarrow \tilde{A}(g) = 0 \Rightarrow \tilde{M}$ reducibel.
Dus ook M reducibel.

Een representatie M heet <u>irreducibel</u> als zij niet half reducibel is, dus als $M(G)$ geen echte invariante deelruimten heeft. Iedere reducibele representatie van een eindige groep is equivalent met de directe som van een aantal irreducibele representaties.

<u>Voorbeeld.</u> Zij G een eindige groep van de orde n met elementen $g_1,\dots,g_n$. Stel $g_i g_k = g_{k(i)}$. Dan is de afbeelding M gedefinieerd door

$$M(g_k) = (m^k_{ij}) \text{ met } m^k_{ij} = \delta_{i,k(j)}, \qquad i,j=1,\dots,n$$

een representatie van G van de graad n.
M heet de reguliere representatie van G. Het spoor van de matrix

$$M(g_k) = \sum_j m^k_{jj} = \sum_j \delta_{jk(j)} = \begin{cases} n & g_k = e \\ 0 & g_k \neq e \end{cases}.$$

<u>Stelling 3.</u> Zijn M_1 en M_2 irreducibele representaties van een groep G met graden m en n, en is er een $m \times n$ matrix S zó dat $M_1(g)S = S\,M_2(g)$ voor alle $g \in G$ dan is of S kwadratisch en inverteerbaar (dus $M_1 \sim M_2$) of $S = 0$.

Bewijs. Zij L_n^o de deelruimte van L_n met $Sx = 0 \Rightarrow x \in L_n^o$. Dan is L_n^o een invariante deelruimte voor $M_2(G)$ en dus

$$L_n^o = L_n \quad \text{of} \quad L_n^o = 0.$$

Als $L_n^o = L_n$ dan $S = 0$.
Als $L_n^o = 0$, dan is S één-éénduidig.
Verder is $S\,L_n$ een invariante deelruimte voor $M_1(G)$, dus $S\,L_n = L_m$ en S inverteerbaar.

Stelling 4 (lemma van Schur). Als een $n \times n$-matrix S verwisselbaar is met alle matrices van een irreducibele representatie van de graad n, dan $S = \lambda I$.

Bewijs. Zij λ een eigenwaarde van S, dan $(S-\lambda I)M(g) =$

$S\,M(g) - \lambda I M(g) = M(g)S - M(g)\lambda I = M(g)(S-\lambda I)$.

Daar $S-\lambda I$ niet inverteerbaar is, volgt uit stelling 3 dat $S = \lambda I$.

Gevolg: Iedere irreducibele representatie van een abelse groep is van de graad 1.

Zij $F(G)$ de verzameling van alle complexe functies op G. Deze functies vormen een n-dimensionale lineaire ruimte als n de orde is van G.
Voer in $F(G)$ een metriek in door te definiëren

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \varphi(g)\,\overline{\psi(g)}.$$

Dan geldt

Stelling 5. Zij M een irreducibele unitaire representatie van G van de graad m. Dan vormen de m^2 groep functies $M_{ij}(g)$ een orthogonaal stelsel.

Bewijs. Zij $S = \sum_g M(g)\,C\,M(g^{-1})$ met C een willekeurige $m \times m$ matrix.
Dan is $M(g^*)S = \sum_g M(g^*g)C\,M(g^{-1}) = \sum_{g'} M(g')C\,M(g'^{-1}g^*) = S\,M(g^*)$.
Uit st.4 volgt dan

$$\sum_g M(g)\,C\,M(g^{-1}) = \lambda_C I.$$

Dus $\sum_g \sum_{l,j} M_{il}(g) C_{lj} M_{jk}(g^{-1}) = \lambda_C \delta_{ik}$.

Kies nu voor C een matrix met $C_{lj} = 1$ als $l = \alpha$, $j = \beta$, anders 0.

Dan

$$\sum_g M_{i\alpha}(g) M_{\beta k}(g^{-1}) = \lambda_C \delta_{ik} \Rightarrow$$

$$\sum_k \sum_g M_{k\alpha}(g) M_{\beta k}(g^{-1}) = \sum_k \lambda_C \Rightarrow \sum_g M_{\beta\alpha}(e) = m\lambda_C \Rightarrow \lambda_C = \frac{n}{m}\delta_{\alpha\beta}.$$

Dus $\sum_g M_{i\alpha}(g) M_{\beta k}(g^{-1}) = \sum_g M_{i\alpha}(g) \overline{M_{k\beta}(g)} = \frac{n}{m}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ik}$.

$$(M_{i\alpha}, M_{k\beta}) = \frac{1}{m}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ik}.$$

Stelling 6. Als M^1 en M^2 twee niet equivalente unitaire representaties zijn, dan $(M^1_{ij}, M^2_{kl}) = 0$.

Bewijs. Zij $S = \sum_g M'(g)\, C\, M^2(g^{-1})$ met C willekeurige $m \times n$ matrix.

Dan is $M^1(g^*)S = S M^2(g^*)$, dus $S = 0$.

Kies nu voor C een matrix met $C_{lj} = 1$ als $l = \alpha$ $j = \beta$, anders 0. Dan

$$\sum_g \sum_{lj} M^1_{il}(g)\, C_{lj}\, M^2_{jk}(g^{-1}) = \sum_g M^1_{i\alpha}(g)\, M^2_{\beta k}(g^{-1}) = 0.$$

Dus $(M'_{i\alpha}, M^2_{k\beta}) = 0$.

Is M een representatie van G, dan wordt met het karakter χ van M bedoeld de groep functie gedefinieerd door $\chi(g) = \sum_{i=1}^{m} M_{ii}(g)$ = spoor van de matrix M(g).

Eigenschappen:

1°. Equivalente representaties hebben dezelfde karakters, daar spoor A= spoor $B^{-1}AB$.

2°. Als g_1 en g_2 tot dezelfde klasse van G behoren, d.w.z. $g_1 = a\, g_2 a^{-1}$, dan $\chi(g_1) = \chi(g_2)$.

Immers

$$\chi(g_1) = \text{spoor.} M(g_1) = \text{spoor } M(ag_2a^{-1}) = \text{spoor } M(a)M(g_2)M(a)^{-1} =$$
$$= \text{spoor } M(g_2) = \chi(g_2).$$

3°. $\chi(e)$ = graad van M.

4°. Als M en M' 2 niet-equivalente irreducibele unitaire representaties zijn met karakters χ en χ', dan is $(\chi, \chi') = 0$.

Immers

$$\sum_g M_{ij}(g)\,\overline{M'_{kl}(g)} = 0 \Rightarrow \sum_g \sum_{i,k} M_{ii}(g)\,\overline{M'_{kk}(g)} = 0 \Rightarrow \sum_g \chi(g)\,\overline{\chi'(g)} = 0.$$

5°. Als M een irreducibele unitaire representatie is, dan is $(\chi,\chi)=1$.

$$\frac{1}{n}\sum_g M_{i\alpha}(g)\,\overline{M_{k\beta}(g)} = \frac{1}{m}\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{ik} \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_g \sum_{i,k} M_{ii}(g)\,\overline{M_{kk}(g)} =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{i,k}\delta_{ik} = 1 \qquad \frac{1}{n}\sum_g \chi(g)\,\overline{\chi(g)} = 1.$$

Zij nu G een groep met orde n en stel dat $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots$ een volledig stel onderling inequivalente unitaire irreducibele representaties is met karakters $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \ldots$.

<u>Stelling 7</u>. Is de representatie M equivalent met de directe som van de irreducibele representaties $M^1 + M^2 + \ldots$ en is m_i het aantal k met $M^k \sim \Gamma^{(i)}$, dan $m_i = (\chi, \chi^{(i)})$.

<u>Bewijs</u>. Het is duidelijk dat $\chi = \chi^{M^{(1)}} + \chi^{M^{(2)}} + \ldots = \sum_i m_i \chi^{(i)}$.

Dus
$$\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\chi(g)\,\overline{\chi^j(g)} = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\sum_i m_i\,\chi^i(g)\,\overline{\chi^j(g)} = \sum_i m_i\,\delta_{ij} = m_j.$$

<u>Gevolg 1</u>. De splitsing van M in irreducibele bestanddelen is éénduidig op equivalentie na.

<u>Gevolg 2</u>. Nodig en voldoende voor de equivalentie van de representaties M en M^1 is de gelijkheid van de karakters χ in χ^1 (m_i hangt alleen van χ en $\chi^{(i)}$ af).

<u>Stelling 8</u>. De reguliere representatie R bevat elke $\Gamma^{(i)}$ precies n_i keer. (n_i is de graad van $\Gamma^{(i)}$) en $\sum_i n_i^2 = n$.

Bewijs. Uit stelling 7 volgt $m_i = (\chi^R, \chi^i) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \chi^R(g) \overline{\chi^{(i)}(g)} =$

$$= \overline{\chi^{(i)}(e)} = n_i .$$

Dus $R \sim n_1 \Gamma^{(1)} + n_2 \Gamma^{(2)} + \dots$

graad R = graad $(n_1 \Gamma^{(1)} + \dots) \Rightarrow n = n_1^2 + n_2^2 + \dots$

I.h.b. volgt hieruit dat er slechts eindig veel irreducibele representaties zijn.

Gevolg 1. Zijn $\Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(h)}$ de verschillende irreducibele representaties dan vormen de n groep functies $\Gamma^{(i)}_{jk}$ een volledig orthogonaal stelsel.

Gevolg 2. Nodig en voldoende voor irreducibiliteit van een representatie is $(\chi, \chi) = 1$.

Immers $(\chi,\chi) = \frac{1}{n} \sum_g \chi(g) \overline{\chi(g)} = \frac{1}{n} \sum_g \sum_{j,k} m_j m_k \chi^j(g) \overline{\chi^k(g)} =$

$$= \sum_k m_k^2 = 1 \Rightarrow m_i = 1,\ m_k = 0 \qquad k \neq i.$$

Daar $\chi(g_1) = \chi(g_2)$ als g_1 en g_2 in dezelfde klasse liggen is χ constant op de klassen $C_1, \dots, C_k$.
Zij $\chi(C_\nu)$ de waarde die $\chi(g)$ voor alle $g \in C_\nu$ heeft en stel k_ν het aantal elementen van de klasse C_ν.
Dan geldt

$$\frac{1}{n} \sum_g \chi^i(g) \overline{\chi^j(g)} = \delta_{ij} \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{k} k_\nu \chi^i(C_\nu) \overline{\chi^j(C_\nu)} = \delta_{ij}.$$

Stelling. Het aantal verschillende inequivalente irreducibele representaties van een eindige groep G is gelijk aan het aantal klassen van geconjugeerde elementen in G.

Bewijs. Zij f een willekeurige klasse functie, d.w.z. $f(h^{-1}gh) = f(g)$, $g,h \in G$. Daar de $\Gamma^{(i)}_{jk}$ een volledig orthogonaal stelsel vormen is

$$f(g) = \sum_{ijk} c_{ijk}\Gamma^{i}_{jk}(g) = \sum_{ijk} c_{ijk}\Gamma^{i}_{jk}(h^{-1}gh) =$$

$$\sum_{\alpha\beta}\ \sum_{ijk} c_{ijk}\Gamma^{i}_{j\alpha}(h^{-1})\Gamma^{i}_{\alpha\beta}(g)\Gamma^{i}_{\beta k}(h)$$

$$\sum_{h} f(g) = nf(g) = \sum_{\alpha\beta}\ \sum_{ijk} c_{ijk}\Gamma^{i}_{\alpha\beta}(g)\sum_{h}\Gamma^{i}_{\beta k}(h)\overline{\Gamma^{i}_{\alpha j}(h)} =$$

$$\sum_{\alpha\beta}\ \sum_{ijk} c_{ijk}\Gamma^{i}_{\alpha\beta}(g)\frac{n}{n_i}\delta_{\alpha\beta}\delta_{kj} = \sum_{\beta}\ \sum_{i,k} c_{ikk}\Gamma^{i}_{\beta\beta}(g)\frac{n}{n_i} =$$

$$= \sum_{i,k}\frac{n}{n_i}c_{ikk}\chi^{i}(g).$$

De karakters χ^{i}, $i=1,\ldots,h$ vormen dus een volledig orthogonaal stelsel in de k-dimensionale ruimte van de klasse functies. Dus $k=h$.

II. Representaties van de draaiingsgroep

B.R. Damsté

II.1. Inleiding tot oneindige groepen

Onder een representatie van een topologische groep G verstaan we een continue homomorfe afbeelding van G op een multiplicatieve groep van niet-singuliere lineaire operatoren, die werken op een Euclidische ruimte of een separabele Hilbert ruimte.

We gaan eerst na in hoeverre de theorie, zoals die voor representaties van eindige groepen is gegeven, is uit te breiden tot representaties van oneindige groepen.

In het vorige hoofdstuk is veel gebruik gemaakt van het gemiddelde $\mu(f)$ over de groep G van een op de groepselementen $g \in G$ gedefinieerde functie $f(g)$. Dus

$$\mu(f) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} f(g) \tag{1.1}$$

waarin n de orde van G voorstelt.
We kunnen deze functionaal karakteriseren door de volgende eigenschappen:

(1.2)
1e $f(g) > 0$ voor alle $g \in G \Rightarrow \mu(f) > 0$.
2e $f(g) \equiv 1$ op $G \Rightarrow \mu(f) = 1$.
3e De functionaal is invariant t.o.v. translatie, d.w.z.: zij h een willekeurig gekozen vast element van G. We definiëren voor $g \in G$: $f_1(g) \overset{\text{def}}{=} f(gh)$. Dan is $\mu(f_1) = \mu(f)$.

Voor discrete oneindige groepen kunnen we proberen een oneindige som te definiëren die aan (1.2) voldoet, voor de groep van gehele getallen bijvoorbeeld

$$\mu(f) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{n=-k}^{k} f(n).$$

Voor een continue groep zullen we een integraal moeten vinden, b.v. voor de draaiingsgroep in het platte vlak:

$$\mu(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi \;.$$

De bewijzen uit hfdst.I zullen dan alleen geldig blijven voor die functies f waarvoor de som resp. integraal convergeert.

Ad stelling 1 (pag.1): Het bewijs loopt precies zo als we H definiëren in overeenstemming met (1.1), dus als

$$H = \frac{1}{n} \sum_{g_j \in G} M^{\dagger}(g_j) M(g_j).$$

Dan hebben we voor een element van de matrix H:

$$H_{qr} = \mu\Big(\sum_{k \leq m} \overline{M_{kq}}\, M_{kr} \Big) \tag{1.3}$$

waarin m de graad van de representatie voorstelt. Zo krijgen we

Stelling 1^*. Een representatie M van een oneindige groep is aequivalent met een unitaire representatie als de functionaal (1.3) voor alle $q, r \leq m$ zin heeft.

Ad stelling 2 (pag.2): Het bewijs berust op stelling 1, en een aequivalente stelling geldt dus met de beperking van stelling 1^*.
Zo is bijvoorbeeld de representatie van de optelgroep van gehele getallen

$$n \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

niet reducibel.

Ad stelling 3 (pag.3): Deze geldt ook voor oneindige groepen

Ad stelling 4 (pag.4): Het lemma van Schur geldt ook voor oneindige groepen.

Ad stelling 5 (pag.4): Het inwendig product kunnen we aangeven als:

$$(\varphi, \psi) = \mu(\varphi \overline{\psi}).$$

Stelling 5 geldt dan als de matrixelementen zodanig zijn dat $\mu(M_{i\alpha}\, \overline{M_{k\beta}})$ zin heeft.

Ad stelling 6(pag.5): Een analoge opmerking als voor stelling 5 geldt ook hier.

Ad stelling 7 (pag.6): Na het voorgaande zijn de hier geldende beperkingen duidelijk.

Voor eindige groepen geldt dat we iedere functie f(g) kunnen schrijven als lineaire combinatie van matrixelementen van de op de canonische vorm gebrachte reguliere representatie (pag.7. Gevolg 1).

Voor compacte topologische groepen geldt het volgende aequivalent, dat we niet bewijzen (de groep van draaiingen om een vast punt in R_3 is zo'n groep).

<u>Stelling II.1.</u> (Peter-Weyl):
Zij G een compacte topologische groep met aftelbare basis. Dan vormen de matrixelementen van alle irreducibele unitaire representaties samen een volledige orthogonale basis in de L^2 van op G gedefinieerde functies f(g).

Voor de draaiingsgroep hebben we nog de volgende
<u>Stelling II.2.</u> Zij T(g) een unitaire representatie van de draaiingsgroep G in een separabele Hilbert ruimte R. Dan zijn er onderling orthogonale eindig dimensionale deelruimten $R_i \subset R$ zodanig dat
$R = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots$
$T(g)\ R_i \subseteq R_i$ voor alle $g \in G$ $(i=1,2,\dots)$
$T(g)$ is in R_i irreducibel $(i=1,2,\dots)$.

II.2. <u>Draaiingen om een vast punt in het platte vlak</u>

Deze vormen een oneindige Abelse groep.
Uit het lemma van Schur volgt dan (vergl. pag.4) dat iedere representatie de graad 1 heeft. Het karakter van de representatie wordt dus gegeven door de getalwaarden van de aan iedere rotatie toegevoegde operator. Zijn φ en ψ hoeken waarover gedraaid wordt, dan is dus, wegens $T(\varphi)T(\psi) = T(\varphi+\psi)$,

$$\chi(\varphi)\ \chi(\psi) = \chi(\varphi+\psi).$$

We differentiëren naar ψ en zetten daarna $\psi = 0$.

$$\chi(\varphi)\ \chi'(0) = \chi'(\varphi).$$

Dus $\chi(\varphi) = \exp(\varphi\,\chi'(0))$.

Nu noemen we

$$m \overset{\text{def}}{=} i\,\chi'(0)$$

de <u>index</u> van de representatie.

We schrijven dan

$$\chi_m(\varphi) = e^{-im\varphi} . \tag{2.1}$$

Representaties met verschillende indices zijn niet aequivalent. Opdat de representatie éénwaardig is, moet kennelijk m een geheel getal zijn. Alle éénwaardige irreducibele unitaire representaties worden dus gegeven door

$$T_m(\varphi) = e^{-im\varphi} \quad (m=0,\pm1,\pm2,\ldots). \tag{2.2}$$

Stelling II.1 zegt dan dat het stelsel (2.2) een volledige orthogonale basis $\{\psi(\varphi)\}$ vormt in de L^2 van op $[0,2\pi]$ gedefinieerde functies. Iedere $f \in L^2$ is dus te schrijven als een Fourier reeks:

$$f(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu(f\,\overline{\psi})\ \psi(\varphi)$$

waarin

$$\mu(f\,\overline{\psi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\ \overline{\psi(\varphi)}\,d\varphi .$$

II.3. <u>Draaiingen om een vast punt in R_3</u>

II.3.1. <u>De bij een draaiing behorende matrix. Geconjugeerde draaiingen.</u>

Beschouw twee vectoren $\vec{x}$ en $\vec{y}$ in R_3. Door de rotatie g gaan ze over in resp. $g\vec{x}$ en $g\vec{y}$. De draaiing verandert noch hun lengte, noch de stand die ze t.o.v. elkaar innemen. Het inwendig product is dus invariant, d.w.z. $(g\vec{x},g\vec{y}) = (x,y)$, dus

$$\sum_i x_i y_i = \sum_{i,k} g_{ik}x_k g_{im}y_m .$$

Dus
$$\sum_i g_{ik}g_{im} = \delta_{km}$$

of

(3.1)
$$g^T g = I.$$

Een matrix g waarvoor dit geldt heet orthogonaal.
Uit (3.1) volgt
$$g^T = g^{-1}.$$

Verder: $(\mathrm{Det}\ g)^2 = 1$.
Dus Det $g = \pm 1$.
Aangezien de draaiing over een hoek 0 om de z-as de determinant 1 heeft en de determinant een continue functie van de draaiing is (dit ziet men bijvoorbeeld aan de parametervoorstelling van Euler, zie verder) is het duidelijk dat alle draaiingen een matrix met determinant 1 hebben. Omgekeerd stellen in de reële R_3 alle unitaire matrices met det.+1 draaiingen voor. Transformaties met determinant -1 zijn geen echte draaiingen.

We stellen een draaiing nu voor door $C_{\vec{k}}(\alpha)$ waarin $\vec{k}$ een eenheidsvector voorstelt langs de draaiingsas, en α de hoek waarover gedraaid wordt ($0 \leq \alpha \leq \pi$). Laat g een willekeurige andere draaiing zijn, die de eenheidsvectoren transformeert volgens $g\vec{e}_i = \vec{e}_i{}'$
Als nu
$$C_{\vec{k}_1}(\alpha_1) \stackrel{\text{def}}{=} gC_{\vec{k}}(\alpha)g^{-1}$$

dan zijn $C_{\vec{k}_1}(\alpha_1)$ en $C_{\vec{k}}(\alpha)$ geconjugeerde draaiingen. Was de matrix van $C_{\vec{k}}(\alpha)$ in de basis $\vec{e}_i$ gegeven als (a_{ij}) dan vinden we:
$$\begin{aligned} C_{\vec{k}_1}(\alpha_1)\vec{e}_j{}' &= gC_{\vec{k}}(\alpha)g^{-1}\vec{e}_j{}' \\ &= gC_{\vec{k}}(\alpha)\vec{e}_j \\ &= g\sum_i a_{ij}\vec{e}_i \\ &= \sum_i a_{ij}\vec{e}_i{}' \quad . \end{aligned}$$

Dus $C_{\vec{k}_1}(\alpha_1)$ heeft in de basis $\vec{e}_i{}'$ dezelfde matrix als $C_{\vec{k}}(\alpha)$ in de

basis $\vec{e}_i$. Dan moet $\alpha_1 = \alpha$, terwijl $\vec{k}_1$ in de basis $\vec{e}_i'$ dezelfde coördinaten moet hebben als $\vec{k}$ in de basis $\vec{e}_i$.
Wegens $\vec{e}_j' = g\vec{e}_j$ moet dus ook

$$\vec{k}_1 = g\vec{k}.$$

We vinden dus:

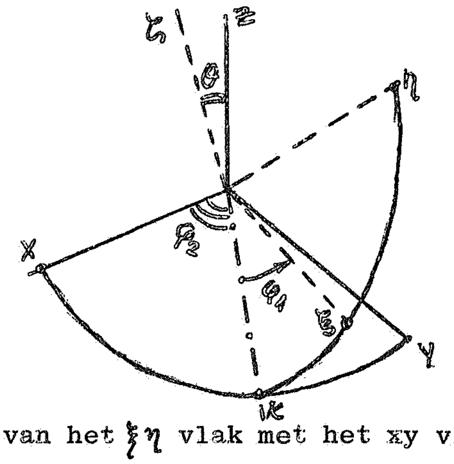
$$gC_{\vec{k}}(\alpha)g^{-1} = C_{g\vec{k}}(\alpha).$$

II.3.2. Parametervoorstellingen van draaiingen

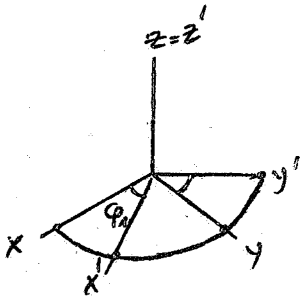
We kennen al de voorstelling $C_{\vec{k}}(\alpha)$. Verder hebben we nog nodig:

A: Iedere draaiing van R_3 kan worden voorgesteld door een vector $\vec{\xi}$, gelegen langs de draaiingsas. Daarbij is de richting van $\vec{\xi}$ zodanig dat voor de hoek φ waarover gedraaid wordt geldt: $0 \leq \varphi \leq \pi$. Voor de lengte van $\vec{\xi}$ geldt: $|\vec{\xi}| = \varphi$.
Zo is dus iedere draaiing voor te stellen als een punt van de massieve bol $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leq \pi^2$, waarbij diametraal tegenover elkaar op het oppervlak van de bol gelegen punten dezelfde draaiing voorstellen. Notatie: $g = g(\vec{\xi})$. Voor de representatie $T(g)$ schrijven we dan ook $T(\vec{\xi})$.

B: de parametervoorstelling van Euler.
Laat het xyz stelsel door de draaiing g overgaan in $\xi\eta\zeta$.

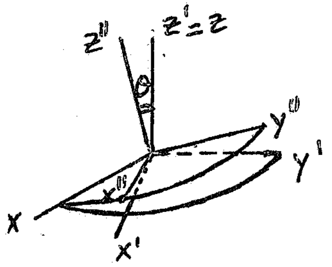


De snijlijn k van het $\xi\eta$ vlak met het xy vlak noemen we de knooplijn.



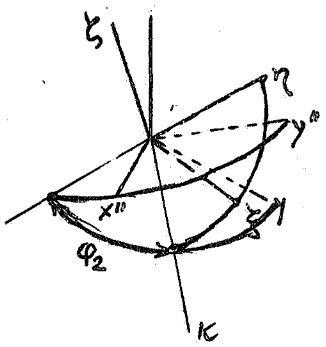
We draaien eerst om de z-as over een hoek φ_1: $xyz \rightarrow x'y'z'$, waarin $z'=z$. De bijbehorende matrix is

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Vervolgens draaien we om de x-as over een hoek Θ: $x'y'z' \rightarrow x''y''z''$. De bijbehorende matrix is

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$



Tenslotte draaien we om de z-as over een hoek φ_2:

$$x''y''z'' \rightarrow \xi\eta\zeta.$$

De bijbehorende matrix is

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & 0 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Voor de draaiing g vinden we dan de matrix

$$g(\varphi_1,\Theta,\varphi_2) = g_{\varphi_2} g_\Theta \, g_{\varphi_1},$$

of

(3.2) $\quad g(\varphi_1,\Theta,\varphi_2) =$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\Theta & -\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos\Theta & \sin\varphi_2\sin\Theta \\ \cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Theta & -\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Theta & -\cos\varphi_2\sin\Theta \\ \sin\varphi_1\sin\Theta & \cos\varphi_1\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Uit de constructie zien we dat we kunnen volstaan met

$$0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi , \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi , \quad 0 \leq \Theta \leq \pi .$$

Voor $\Theta=0$ of $\Theta=\pi$ zijn meerdere schrijfwijzen voor g mogelijk:

$$g(\varphi_1,0,\varphi_2) = g(\varphi_1-\alpha,0,\varphi_2+\alpha)$$

$$g(\varphi_1,\pi,\varphi_2) = g(\varphi_1+\alpha,\pi, \varphi_2+\alpha) .$$

II.3.3. <u>De functionaal $\mu(f)$ voor de draaiingsgroep</u>

$f(\varphi_1,\Theta,\varphi_2)$ stelt een éénwaardige functie voor, gedefinieerd op de elementen van de draaiingsgroep. We beweren dat de functionaal

$$\mu(f) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi_1,\Theta,\varphi_2) \sin\Theta \, d\varphi_1 \, d\Theta \, d\varphi_2 \tag{3.3}$$

voldoet aan de eisen (1.2).

(We schrijven ook: $\mu(f) = \int f(g)dg$).

Dat $\mu(f)$ voldoet aan de onder 1^e^ en 2^e^ genoemde eisen is duidelijk. Wat de onder 3^e^ genoemde eis betreft: We merken op dat de rechter kolom van (3.2) juist de coördinaten van ζ geeft in het xyz stelsel, d.w.z.

$$(g_{ij}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi_2 \sin\Theta \\ -\cos\varphi_2 \sin\Theta \\ \cos\Theta \end{pmatrix} .$$

Deze zijn onafhankelijk van φ_1.

We kunnen dus $\varphi_2 - \frac{\pi}{2}$ en Θ opvatten als bolcoordinaten op de eenheidsbol. Dan is het duidelijk dat, als $d\sigma$ het elementaire oppervlak op die bol voorstelt,

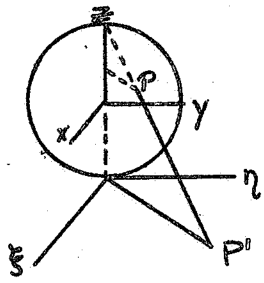
$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi_1,\Theta,\varphi_2)d\sigma = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi_1,\Theta',\varphi_2')d\sigma . \tag{*}$$

Wegens de periodiciteit van f als functie van φ_1 geldt dan ook

$$(**)\qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi_1,\Theta',\varphi_2')\,d\varphi_1\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi_1',\Theta',\varphi_2')\,d\varphi_1\,d\sigma.$$

Uit (*) en (* *) samen volgt dan juist de 3^e voorwaarde van (1.2).

II.3.4. <u>Voorbeeld van een representatie van de graad 2: de unimodulaire groep</u>



Beschouw de bol $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}$. Dan correspondeert met het punt P(x,y,z) op de bol, door stereografische projectie vanuit de noordpool N op het raakvlak aan de zuidpool, het punt (ξ,η) met $\xi=\frac{x}{\frac{1}{2}-z}$, $\eta=\frac{y}{\frac{1}{2}-z}$. We rekenen verder met $\zeta \overset{\text{def}}{=} \xi+i\eta=\frac{x+iy}{\frac{1}{2}-z}$. Uit $x^2+y^2=\frac{1}{4}-z^2$ volgt ook: $\zeta=\frac{\frac{1}{2}+z}{x-iy}$.

Het is duidelijk dat een rotatie van de bol over een hoek om de z-as in het ζ vlak de transformatie

$$\zeta' = \zeta e^{i\varphi} \tag{3.4}$$

ten gevolge heeft.

Een analoge beschouwing geldt voor een draaiing over een hoek Θ van de bol om zijn x-as. Namelijk: in het complexe ω vlak, waarvoor geldt

$$\omega=\frac{y+iz}{\frac{1}{2}-x},$$

correspondeert met deze draaiing de transformatie

$$\omega' = \omega e^{i\Theta}. \tag{3.5}$$

Enig gereken geeft de relaties

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\omega+i}{\omega-i} &= \zeta \\ \frac{\omega'+i}{\omega'-i} &= \zeta'. \end{aligned}\right. \tag{3.6}$$

Loâsen we uit (3.6) ω en ω 'op, dan geeft dit samen met (3.5), na enig gereken

$$\zeta' = \frac{\zeta \cos\frac{\theta}{2} + i \sin\frac{\theta}{2}}{i\zeta \sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}} . \tag{3.7}$$

We hebben dus corresponderende met een draaiing om de z-as over de hoek φ de transformatie (3.4), die ook te schrijven is als

$$\zeta' = \frac{\zeta e^{i\frac{\varphi}{2}}}{e^{-i\frac{\varphi}{2}}} , \tag{3.8}$$

terwijl we voor een draaiing om de x-as over een hoek θ de corresponderende transformatie (3.7) vinden. Beide zijn van de vorm

$$\zeta' = \frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta} , \tag{3.9}$$

welke gebroken lineaire transformatie geheel bepaald is door de matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ of } \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

met determinant 1.

Men ziet gemakkelijk in dat het product van twee transformaties van het type (3.9) weer een dergelijke transformatie is, waarvan de matrix gelijk is aan het product van de bij de samenstellende transformaties behorende matrices.

Met een rotatie g, waarvan de Eulerse parameters zijn $\varphi_1, \theta, \varphi_2$, correspondeert dan het matrixproduct

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi_2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_2}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i \sin\frac{\theta}{2} \\ i \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_1}{2}} \end{pmatrix} ,$$

zoals men ziet uit (3.7) en (3.8).

Dus

$$T(g) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\exp\left(i\,\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right) & i\sin\frac{\theta}{2}\exp\left(i\,\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right) \\ i\sin\frac{\theta}{2}\exp\left(-i\,\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right) & \cos\frac{\theta}{2}\exp\left(-i\,\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right) \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Dit is een unitaire 2×2 matrix met determinant 1, omdat alle factoren in het matrixproduct deze eigenschappen hebben.

Omgekeerd correspondeert met iedere unitaire 2×2 matrix met determinant 1 een draaiing.

Een dergelijke matrix moet nl. de vorm

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

hebben, waarin $|\alpha|^2+|\beta|^2 = 1$.

Vergelijken we deze met (3.11) dan zien we dat de matrix (3.12) correspondeert met een draaiing waarvan de Eulerse parameters zijn gekarakteriseerd door:

$$\begin{cases} \cos\frac{\theta}{2} = |\alpha| \\ \sin\frac{\theta}{2} = |\beta| \\ \dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2} = \arg\alpha \\ \dfrac{\varphi_2-\varphi_1+\pi}{2} = \arg\beta \end{cases}.$$

We zagen dat we de met (3.9) corresponderende matrix op twee manieren konden schrijven (3.10). Met iedere draaiing corresponderen dus twee unitaire 2×2 matrices met determinant +1. Dit is ook duidelijk: Beschouw de rotatie over een hoek φ om de z-as. De hiermee corresponderende matrices zijn

$$\begin{pmatrix} \pm e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & \pm e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}.$$

Want bij continue draaiing van $\varphi=0$ tot $\varphi=2\pi$ blijkt dat er twee eenheidsmatrices zijn:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Deze representatie is dus essentieel tweewaardig.

Als we zetten $\alpha = a_1+ib_2$, $\beta = b_1+ib_2$, zien we dat de draaiingsgroep wordt afgebeeld op het oppervlak van de vierdimensionale bol $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$. Hierbij wordt een rotatie afgebeeld op twee punten op de bol, die t.o.v. de oorsprong gespiegeld liggen.

II.3.5. <u>Infinitesimale draaiingen en de ermee corresponderende matrices</u>

In het volgende stelt T een unitaire representatie van de draaiingsgroep voor. We nemen de parametervoorstelling A uit II.3.2 (pag.14).

$$T(g) = T(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = T(\vec{\xi}) \text{ met } |\vec{\xi}| \leq \pi .$$

Dan kan bewezen worden dat $T(\vec{\xi})$ een differentieerbare functie is van ξ_1,ξ_2 en ξ_3. (Zie het artikel van I.M. Gel'fand en Z.Ya Shapiro (A.M.S. Translations Series 2, vol.2) appendix § 2 (p.235) of: M.A. Naimark: Les représentations du groupe de Lorentz, Ch.2, § 2.1).

Aangezien $T(0,0,0) = I$ hebben we de volgende Taylorontwikkeling:

(3.13) $\quad T(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = I + A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3$ + hogere ordetermen,

met $\quad A_k \overset{\text{def}}{=} \left.\dfrac{\partial T}{\partial \xi_k}\right|_{\vec{\xi}=0}$, $\quad (k=1,2,3)$.

De matrix A_1 kunnen we als volgt interpreteren:

$$T(\xi_1,0,0) = I + A_1\xi_1 + \dots$$

De matrix die is toegevoegd aan een kleine draaiing ξ_1 om de x-as is dus op hogere ordetermen na bepaald door A_1.

Analoog voor ξ_2, y-as, A_2

en ξ_3, z-as, A_3 .

We hebben nu de volgende

Stelling II.3. Zijn de matrices A_k (k=1,2,3) gegeven, dan ligt voor iedere draaiing $g(\vec{\xi})$ de matrix $T(\vec{\xi})$ vast. (M.a.w.: de matrices A_k bepalen de representatie $T(g)$ volledig).

Bewijs: Neem een willekeurige vector $\vec{\xi} \neq 0$ en beschouw twee rotaties $g(t\vec{\xi})$ en $g(s\vec{\xi})$ (t en s reëel). Dan geldt

$$g((t+s)\vec{\xi}) = g(t\vec{\xi})g(s\vec{\xi}).$$

Dus ook

$$T((t+s)\vec{\xi}) = T(t\vec{\xi})T(s\vec{\xi}).$$

We differentiëren nu beide zijden naar s en stellen dan s=0

$$\frac{d}{dt}T(t\vec{\xi}) = T(t\xi)\frac{d}{ds}T(s\vec{\xi})\Big|_{s=0} . \tag{3.14}$$

Verder is volgens (3.13)

$$T(s\vec{\xi}) = I + s\sum_{i=1}^{3} A_i\xi_i + \dots$$

dus

$$\frac{d}{ds}T(s\xi)\Big|_{s=0} = \sum A_i\xi_i .$$

Bovendien hebben we $T(0) = I$.

Samen met (3.14) levert dit

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}T(t\vec{\xi}) = T(t\xi)\sum A_i\xi_i \\ T(0) = I. \end{cases}$$

De oplossing is

$$T(t\vec{\xi}) = \exp(t\sum A_i \xi_i).$$

Hieruit volgt

(3.15) $$T(\xi) = e^{\sum A_i \xi_i}$$

waarmee het gestelde is bewezen.

Toepassing: Uit formule 2.1 zien we dat voor een representatie met index m van de groep van draaiingen in het platte vlak geldt:
$A = -im$, $T(\varphi) = e^{A\varphi}$.

We gaan nu relaties tussen de matrices A_i afleiden. Daartoe beschouwen we een rotatie $g_o(\vec{\eta})$, waarvan we de matrix g_o noemen.
Verder nemen we een willekeurige rotatie g. Dan volgt uit II.3.1 (pag.13-14):
Als $\vec{\eta}$ door de rotatie g overgaat in

$$\tilde{\vec{\eta}} = g\vec{\eta}$$

gaat de matrix g_o over in

$$\tilde{g}_o = g\, g_o\, g^{-1}$$

die bij $\tilde{\vec{\eta}}$ hoort. (D.w.z. $\tilde{g}_o = \tilde{g}_o(\tilde{\vec{\eta}})$).

Voor de representatie T geldt dan:

(3.16) $$T(\tilde{g}_o) = T(g)\, T(g_o) T(g^{-1}).$$

Is nu g_o (en daarmee $\tilde{g}_o$) een kleine draaiing, dan geldt volgens (3.13)

$$T(g_o) = I + \sum A_i \eta_i + \dots$$
$$T(\tilde{g}_o) = I + \sum A_i \tilde{\eta}_i + \dots$$

Invullen hiervan in (3.16) geeft

$$I + \sum A_i \tilde{\eta}_i + \ldots = T(g)(I + \sum A_i \eta_i + \ldots)T(g^{-1}).$$

Gelijkstellen van de eerste orde termen links en rechts levert (dit kunnen we doen omdat het in beide gevallen dezelfde draaiing betreft, echter in een ander coördinatenstelsel)

$$(3.17) \qquad T(g) \sum A_i \eta_i \; T(g^{-1}) = \sum A_i \tilde{\eta}_i .$$

Deze relatie verandert niet als we $\vec{\eta}$ en $\tilde{\vec{\eta}}$ ieder met een zelfde getal vermenigvuldigen, dus we hoeven nu de draaiingen niet meer klein te veronderstellen.
Laat nu g een draaiing zijn om de x-as over een kleine hoek α, d.w.z. $g = g(\alpha, 0, 0)$, en laat $\vec{\eta}$ de vector (0,1,0) zijn. Dan krijgen we

$$\tilde{\vec{\eta}} = (0, 1, \alpha).$$

We hebben dus

$$(3.18) \qquad \begin{cases} T(g) = I + A_1\alpha + O(\alpha^2) \\ T(g^{-1}) = I - A_1\alpha + O(\alpha^2) \\ \sum A_i \eta_i = A_2 \\ \sum A_i \tilde{\eta}_i = A_2 + \alpha A_3 . \end{cases}$$

Substitueren we (3.18) in (3.17) en stellen we links en rechts de coëfficienten van α gelijk dan krijgen we

$$A_1A_2 - A_2A_1 = A_3 .$$

Door cyclische verwisseling krijgen we nog twee dergelijke relaties.
We definiëren de commutator van twee operatoren P en Q:

$$[P, Q] \stackrel{\text{def}}{=} PQ - QP.$$

Dan geldt

(3.19) $\quad [A_p, A_q] = A_r \quad$ (p,q,r cyclische permutatie van 1,2,3).

We hebben hier nog niet geeist dat T(g) een unitaire representatie is:

$$T^{\dagger}(\xi_1,0,0)\ T(\xi_1,0,0) = I.$$

Dus volgens (3.13):

$$(I+\xi_1 A_1^{\dagger}+\ldots)(I+\xi_1 A_1+\ldots) = I.$$

De coëfficiënt van ξ_1 in het linkerlid moet =0 zijn:

(3.20) $\quad A_1^{\dagger} = -A_1,$

en analoog voor A_2 en A_3.
We definiëren nu

(3.21) $\quad H_k \overset{def}{=} iA_k \quad (k=1,2,3).$

H_k is dan hermitisch, en de verwisselingsrelaties (3.19) worden

(3.22) $\quad [H_p, H_q] = iH_r \quad$ (p,q,r cyclische permutatie van 1,2,3).

Dit is een nodige voorwaarde opdat $T(\vec{\xi}) \overset{def}{=} e^{-i\sum H_k \xi_k}$ een unitaire representatie van de draaiingsgroep voorstelt. Later zal blijken dat de voorwaarde ook voldoende is. We gaan nu proberen alle tripels van hermitische operatoren te vinden die aan (3.22) voldoen.

II.3.6. De eigenvectoren van H_3. Irreducibele representaties van de draaiingsgroep.

Stel dat we matrices H_i hebben gevonden die aan (3.22) voldoen. In plaats van deze matrices beschouwen we verder H_+, H_- en H_3, die als volgt gedefinieerd zijn:

(3.23) $$\begin{cases} H_+ = H_1 + iH_2 \\ H_- = H_1 - iH_2 \\ H_3 = H_3 \end{cases}$$

Samen met (3.21) levert dit voor de A_i:

$$(3.24)\quad \begin{cases} A_1 = -\frac{i}{2} H_+ - \frac{i}{2} H_- \\ A_2 = -\frac{1}{2} H_+ + \frac{1}{2} H_- \\ A_3 = -iH_3 . \end{cases}$$

De verwisselingsrelaties voor H_+, H_- en H_3 zijn

$$(3.25)\quad \begin{cases} [H_+, H_3] = -H_+ \\ [H_-, H_3] = H_- \\ [H_+, H_-] = 2H_3 \end{cases}$$

We hebben nu de volgende

Stelling II.4. Zij f een eigenvector van H_3 bij de eigenwaarde λ,

verder $f_+ \overset{\text{def}}{=} H_+ f$

$f_- \overset{\text{def}}{=} H_- f$.

Dan geldt: $\eth f\ f_+ = 0$

$\eth f\ H_3 f_+ = (\lambda+1) f_+$

en $\eth f\ f_- = 0$

$\eth f\ H_3 f_- = (\lambda-1) f_-$.

Bewijs: $H_3 f_+ = H_3 H_+ f = [H_3, H_+] f + H_+ H_3 f = H_+ f + \lambda H_+ f = (\lambda+1) f_+$.

De bewering over f_- wordt analoog bewezen.

H_3 is hermitisch, de eigenwaarden zijn dus reëel. Laat j de grootste van deze eigenwaarden zijn, f_j een genormeerde eigenvector van H_3 bij de eigenwaarde j.

Dus $H_3 f_j = j f_j \qquad (f_j, f_j) = 1.$

Als $H_- f_j \neq 0$, dan zetten we

$$H_- f_j = \alpha_j f_{j-1} \text{ met } (f_{j-1}, f_{j-1}) = 1, \quad \alpha_j > 0.$$

Zo gaan we verder:

$$H_- f_{j-1} = \alpha_{j-1} f_{j-2} \quad \text{met } (f_{j-2}, f_{j-2}) = 1, \quad \alpha_{j-1} > 0$$

$$H_- f_{j-2} = \alpha_{j-2} f_{j-3} \quad \text{met } (f_{j-3}, f_{j-3}) = 1, \quad \alpha_{j-2} > 0.$$

Stelling II.4 is dan

$$H_3 f_{j-1} = (j-1) f_{j-1}$$

$$H_3 f_{j-2} = (j-2) f_{j-2} \ .$$

$$\vdots$$

De matrix H_3 heeft maar eindig veel eigenwaarden, dus volgens de stelling moet voor een zekere index k gelden

$$H_3 f_k = k f_k, \quad H_- f_k = 0 \ .$$

We hebben nu dus een orthonormaal stelsel eigenvectoren van H_3 gevonden zodanig dat

$$(3.26) \quad \begin{cases} H_3 f_m = m f_m & (m=j,\ j-1, \ldots, k) \\ H_- f_m = \alpha_m f_{m-1} & (m=j,\ j-1, \ldots, k) \text{ met } \alpha_k \overset{\text{def}}{=} 0. \end{cases}$$

Volgens stelling II.4 moet, omdat j de grootste eigenwaarde van H_3 is, gelden

$$(3.27) \qquad H_+ f_j = 0.$$

We kijken nu wat H_+ doet met de andere vectoren f_m:

$$H_+ f_{j-1} = \frac{1}{\alpha_j} H_+ H_- f_j = \frac{1}{\alpha_j} \left[H_+, H_- \right] f_j + H_- H_+ f_j .$$

Met behulp van (3.25) en (3.27) vinden we hieruit:

$$H_+ f_{j-1} = \frac{2}{\alpha_j} H_3 f_j = \frac{2j}{\alpha_j} f_j .$$

Definiëren we $\beta_j \overset{\text{def}}{=} \dfrac{2j}{\alpha_j}$ dan hebben we

$$H_+ f_{j-1} = \beta_j f_j .$$

Stel dat voor $n=j-1, j-2, \ldots, m+1$ al is bewezen

$$\exists \beta_{n+1} (H_+ f_n = \beta_{n+1} f_{n+1}).$$

Voor $n=m$ vinden we dan

$$\begin{aligned}
H_+ f_m &= \frac{1}{\alpha_{m+1}} H_+ H_- f_{m+1} \\
&= \frac{1}{\alpha_{m+1}} \left\{ \left[H_+, H_- \right] + H_- H_+ \right\} f_{m+1} \\
&= \frac{2}{\alpha_{m+1}} H_3 f_{m+1} + \frac{\beta_{m+2}}{\alpha_{m+1}} H_- f_{m+2} \\
&= \frac{2(m+1) + \beta_{m+2}\alpha_{m+2}}{\alpha_{m+1}} f_{m+1} .
\end{aligned}$$

We definiëren nu $\beta_{m+1} \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{2(m+1)+\beta_{m+2}\alpha_{m+2}}{\alpha_{m+1}}$, en we hebben dus gevonden dat uit de inductieveronderstelling volgt:

$$\exists \beta_{m+1} (H_+ f_m = \beta_{m+1} f_{m+1}).$$

Voor de coëfficiënten β_m geldt:

$$(3.28) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \beta_{j+1} \stackrel{\text{def}}{=} 0 & \text{(in overeenstemming met (3.27))} \\ \beta_m = \dfrac{2m+\beta_{m+1}\alpha_{m+1}}{\alpha_m} & (m=j, j-1, \ldots, k+1). \end{array} \right.$$

We gaan α_m en β_m berekenen.
Uit (3.23) volgt

$$H_+^{\dagger} = H_- .$$

Dus

$$(H_+ f_{m-1}, f_m) = (f_{m-1}, H_- f_m)$$

of

$$\beta_m (f_m, f_m) = \alpha_m (f_{m-1}, f_{m-1}).$$

Omdat f_m en f_{m-1} genormeerd zijn hebben we dus

$$(3.29) \qquad \alpha_m = \beta_m .$$

Samen met (3.28) levert dit

$$\alpha_m^2 - \alpha_{m+1}^2 = 2m.$$

Optelling van deze relaties voor de indices $j, j-1, j-2, \ldots, m$ geeft

$$\begin{aligned} -\alpha_{j+1}^2 + \alpha_m^2 &= 2j+2(j-1)+2(j-2)+\ldots+2m \\ &= (m+j)(j-m+1). \end{aligned}$$

Wegens (3.29) en (3.28) is $\alpha_{j+1} = 0$, dus

$$(3.30) \qquad \alpha_m^2 = (j+m)(j-m+1).$$

We weten dat $\alpha_k = 0$ (3.26).
Uit (3.30) komt voor $m=k$:

$$(j+k)(j-k+1) = 0.$$

Nu is $k \leq j$, dus $j-k+1 > 0$.
Dus moet

$$(3.31) \qquad k=-j.$$

Verder was $j-k$ het aantal stappen dat we hebben gedaan om, door steeds de operator H_- toe te passen, van f_j te komen tot f_k, d.w.z. $f_k \sim H_-^{j-k} f_j$. Dus $j-k$ is een geheel getal. Samen met (3.31) levert dit het resultaat dat $2j$ geheel is, dus <u>j is een geheel of een "half" getal</u>.
Het aantal gevonden vectoren f_m is dan $2j+1$. We beweren niet dat dit alle eigenvectoren van H_3 zijn. We hebben slechts, uitgaande van de grootste eigenwaarde j, $2j+1$ eigenvectoren gevonden behorend bij de eigenwaarden $j, j-1, j-2, \ldots, -j$.

Laat nu $T(g)$ een <u>irreducibele</u> representatie zijn van de draaiingsgroep, werkend op de ruimte R. Dan is er geen deelruimte $R_1 \subset R$ zodanig dat

$$A_i R_1 \subseteq R_1 \qquad (i=1,2,3),$$

anders zou wegens (3.15) ook

$$T(g)R_1 \subseteq R_1, \text{ dus zou } T(g) \text{ in } R \text{ reducibel zijn.}$$

Voor de ruimte R_2, opgespannen door

$$f_j, f_{j-1}, f_{j-2}, \ldots, f_{-j} \tag{3.32}$$

geldt echter

$$H_+ R_2 \subseteq R_2, \; H_- R_2 \subseteq R_2, \; H_3 R_2 \subseteq R_2,$$

dus ook

$$A_i R_2 \subseteq R_2 \qquad (i=1,2,3).$$

Uit de voorgaande beschouwing volgt dan dat

$$R_2 \equiv R.$$

We noemen de basis (3.32) de canonische basis voor R, het getal j noemen we het <u>gewicht</u> van de representatie. Voor de vectoren van de canonische basis gelden de relaties

$$\left\{\begin{aligned} H_+ f_m &= \alpha_{m+1} f_{m+1} \\ H_- f_m &= \alpha_m f_{m-1} \\ H_3 f_m &= m\, f_m \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} \alpha_m &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \\ m &= j, j-1, j-2, \ldots, -j \, . \end{aligned} \tag{3.33}$$

Voor de operatoren A_i vinden we uit (3.24) en (3.33):

$$\left\{\begin{aligned} A_1 f_m &= -\frac{i}{2}\sqrt{(j+m+1)(j-m)}\, f_{m+1} - \frac{i}{2}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\, f_{m-1} \\ A_2 f_m &= -\frac{1}{2}\sqrt{(j+m+1)(j-m)}\, f_{m+1} + \frac{1}{2}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\, f_{m-1} \\ A_3 f_m &= -imf_m \end{aligned}\right. \tag{3.34}$$

waarin $m = j, j-1, j-2, \ldots, -j$.

We hebben dus bewezen de volgende

Stelling II.5. Iedere irreducibele unitaire representatie van de draaiingsgroep is gedefinieerd door een geheel of "half" getal j, dat we het gewicht van de representatie noemen. De met infinitesimale draaiingen corresponderende transformaties A_i (i=1,2,3) die de representatie bepalen volgens (3.15) worden, in de canonische basis uitgedrukt, gedefinieerd door (3.31). De graad van de representatie is dus 2j+1.

We hebben helemaal niet bewezen dat er dergelijke representaties bestaan. We hebben alleen noodzakelijke voorwaarden verkregen. Wel tonen we aan:

Stelling II.6. Als $T(\vec{\xi})$ een representatie is van de draaiingsgroep, gedefinieerd door (3.15), waarin de operatoren A_k voldoen aan (3.31), dan is deze representatie irreducibel.

Bewijs: Laat R de ruimte zijn waarop $T(\vec{\xi})$ werkt. Stel $\exists R_1 (R_1 \subset R,\ H_+R_1 \subseteq R_1,\ H_-R_1 \subseteq R_1,\ H_3R_1 \subseteq R_1)$. In R_1 heeft H_3 een eigenvector h, behorend bij de grootste eigenwaarde van H_3 in R_1. Deze is te schrijven als

$$h = \sum_{m=-j}^{j} c_m f_m \ . \tag{3.35}$$

Volgens stelling II.4 geldt dan:

$$H_+ h = 0.$$

Dus

$$\sum_{m=-j}^{j} c_m H_+ f_m = \sum_{-j}^{j} c_m \alpha_{m+1} f_{m+1} = 0.$$

De vectoren f_m zijn onafhankelijk, dus moet

$$c_m \alpha_{m+1} = 0 \quad (m=j,j-1,j-2,\ldots,-j).$$

Voor $m < j$ is $\alpha_{m+1} \neq 0$, dus moet $c_m = 0$ voor $m < j$.
Dus (3.35) wordt

$$h = c_j f_j .$$

We zien dus dat $f_j \in R_1$.
Dan ook volgens veronderstelling

$$H_- f_j \in R_1$$
$$H_-^2 f_j \in R_1$$
$$\vdots$$

d.w.z. $f_j, f_{j-1}, f_{j-2}, \ldots, f_{-j} \in R_1$.
Dus $R_1 = R$, waarmee het gestelde is bewezen.

Tevens blijkt uit dit bewijs:

Stelling II.7: De ruimte R waarin een irreducibele unitaire representatie T(g) van de draaiingsgroep werkt bevat één en slechts één vector f (op scalaire veelvouden na) zodanig dat $H_+ f = 0$.

Dit is namelijk de vector f_j.

II.3.7. Splitsing van een unitaire representatie in irreducibele delen

Als een unitaire representatie $T(\vec{\xi})$ op de ruimte R is gegeven, dan kennen we ook $A_k = \left.\frac{\partial T}{\partial \xi_k}\right|_{\vec{\xi}=0}$ (k=1,2,3), dus ook H_+, H_- en H_3. Het stelsel vectoren $f_j, f_{j-1}, \ldots, f_{-j}$ spant, als T reducibel is, een invariante deelruimte $R_o \subset R$ op. Het orthogonale complement R_o' van R_o is dan ook invariant t.o.v. de transformaties H_+, H_- en H_3. In R_o' kunnen we dan de grootste eigenwaarde j_1 van H_3 zoeken en zo de rij vectoren $f_{j_1}, f_{j_1-1}, \ldots, f_{-j_1}$ construeren, die samen een ruimte $R_1 \subset R$ opspannen. Dit proces zetten we voort tot R helemaal is gesplitst. We kunnen dus concluderen:

Laat een unitaire representatie van de rotatiegroep zijn gegeven. Dan is er een orthonormale basis in R te vinden zodanig dat de matrices A_k (k=1,2,3) nevenstaande vorm hebben, waarin de matrices $A_k^{(p)}$ er als volgt uitzien (verg. (3.34)). De nummering van rijen en

$$A_k = \begin{pmatrix} A_k^{(0)} & & & & & & \\ & A_k^{(1)} & & & & & \\ & & A_k^{(2)} & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & A_k^{(s)} \end{pmatrix} \qquad (3.36)$$

kolommen van de matrices loopt van $-j_p$ tot j_p):

$$
(3.37) \quad A_1^{(p)} = -\frac{i}{2}
\begin{pmatrix}
0 & \alpha_{-j_p+1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\alpha_{-j_p+1} & 0 & \alpha_{-j_p+2} & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \alpha_{-j_p+2} & 0 & & & \\
\vdots & & & \ddots & & \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{j_p} \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{j_p} & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
(3.38) \quad A_2^{(p)} = \frac{1}{2}
\begin{pmatrix}
0 & \alpha_{-j_p+1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
-\alpha_{-j_p+1} & 0 & \alpha_{-j_p+2} & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & -\alpha_{-j_p+2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{j_p} \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & -\alpha_{j_p} & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
(3.39) \quad A_3^{(p)} =
\begin{pmatrix}
ij_p & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & i(j_p-1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & i(j_p-2) & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & -i(j_p-1) & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -ij_p
\end{pmatrix}
$$

waarin $\alpha_m = \sqrt{(j_p+m)(j_p-m+1)}$.

Om de splitsing ook werkelijk uit te voeren beschouwen we eerst H_+.

$$H_+f = 0 \Longrightarrow f = c_1f_{j_1} + c_2f_{j_2} + c_3f_{j_3} + \dots$$

In het bijzonder geldt voor f_{j_1}, f_{j_2},... dat $H_+f_{j_i} = 0$, terwijl bovendien $H_3f_{j_i} = j_if_{j_i}$.

We gaan nu als volgt te werk:

$$\mathcal{L} \overset{\text{def}}{=} \left\{ f \middle| f \in R,\ H_+f = 0 \right\}.$$

Zoek in $\mathcal{L}$ een volledig orthonormaal stelsel eigenvectoren van H_3. Uitgaande van ieder van deze vectoren f_{j_k} construeren we de vectoren $H_-f_{j_k}$, $H_-^2f_{j_k}$,...,$H_-^{2j_k}f_{j_k}$, die samen met f_{j_k} het deel van de basis leveren dat een invariante deelruimte opspant.

Dus:

Gegeven een representatie. Deze is te splitsen in irreducibele representaties met zodanige gewichten j, dat er simultane oplossingen zijn van

(3.40) $$H_+f = 0,\ H_3f = jf.$$

De representatie met het gewicht j komt zo vaak voor als er lineair onafhankelijke oplossingen zijn van (3.40).

Als j een meervoudige eigenwaarde is kunnen we deze lineair onafhankelijke oplossingen op vele manieren kiezen. De ontbinding is dus niet eenduidig.

II.3.8. Enkele voorbeelden: $j=0$, $j=\frac{1}{2}$, $j=1$.

$j=0$: De representatie heeft de graad 1. Uit de formules (3.37), (3.38) en (3.39) zien we dat $A_1 = A_2 = A_3 = 0$. De representatie is dus volgens (3.15)

$$T(\vec{\xi}) \equiv 1.$$

$j = \frac{1}{2}$: De unitaire representatie van de graad 2 is in II.3.4 gegeven (de unimodulaire groep). We vinden m.b.v. de in II.3.4 gegeven $T(\varphi_1)$ en $T(\Theta)$ (zie pag.18) en de definitie van A_k (nl. $A_k = \left.\frac{\partial T(\vec{\xi})}{\partial \xi_k}\right|_{\vec{\xi}=0}$):

$$A_1 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dit geeft m.b.v. (3.19)

$$A_2 = [A_3, A_1] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De matrix A_3 heeft hier de vorm (3.39), A_1 en A_2 hebben echter niet de vorm (3.38) resp. (3.40). Kennelijk is de gebruikte basis niet de canonische basis. Dan zien we ook: Noemen we de eigenvectoren van H_3 bij de eigenwaarden $-\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}$ resp. $e_{-\frac{1}{2}}(1,0)$ en $e_{\frac{1}{2}}(0,1)$ dan geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} H_+e_{\frac{1}{2}} = 0 & H_+e_{-\frac{1}{2}} = -e_{\frac{1}{2}} \\ H_-e_{-\frac{1}{2}} = 0 & H_-e_{\frac{1}{2}} = -e_{-\frac{1}{2}} \end{array}\right\} \text{ maar } \alpha_{\frac{1}{2}} = 1 \text{ (zie (3.33))}$$

De juiste oplossing krijgen we door te nemen

$$\left\{\begin{array}{l} f_{\frac{1}{2}} = ie_{\frac{1}{2}} \\ f_{-\frac{1}{2}} = -ie_{-\frac{1}{2}} . \end{array}\right.$$

Door deze coördinatentransformatie gaan de matrices A_i over in resp.:

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & +i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

wat in overeenstemming is met (3.38), (3.39), (3.40). In de canonische basis krijgt de matrix (3.11) de vorm

$$(3.41)\quad \begin{pmatrix} \cos\frac{\Theta}{2}\exp(i\,\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}) & -i\sin\frac{\Theta}{2}\exp(i\,\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}) \\ -i\sin\frac{\Theta}{2}\exp(-i\,\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}) & \cos\frac{\Theta}{2}\exp(-i\,\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}) \end{pmatrix}$$

j = 1: De unitaire representatie van de graad 3 is de toevoeging aan iedere draaiing van zijn eigen matrix, want volgens II.3.1 is dit een orthogonale matrix met determinant +1, en een orthogonale matrix is in een complexe ruimte unitair.

H_3 heeft hier de vorm

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden zijn dus -1,0,+1. Nemen we de bijbehorende eigenvectoren

$$\begin{cases} f_{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ f_0 = (0, 0, 1) \\ f_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right) \end{cases}$$

dan is voldaan aan (3.33) (en uiteraard aan (3.34), zodat we hier de canonische basis hebben.

Volgens (3.37), (3.38) en (3.39) hebben de matrices A_i in deze basis uitgedrukt de vorm:

$$A_1 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Men verifieert dan gemakkelijk dat de relaties (3.34) nu ook in de nieuwe basis geldig zijn.

Uit (3.15) en (3.39) zien we, dat voor een representatie met gewicht j geldt, dat de matrix behorende bij een draaiing over een hoek φ om de z-as in de canonische basis de vorm heeft

$$(3.42)\qquad \begin{pmatrix} e^{ij\varphi} & & & 0 \\ & e^{i(j-1)\varphi} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{-ij\varphi} \end{pmatrix}$$

Voor het speciale geval j=1 vinden we hiervoor

$$T(0,0,\varphi) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$$

II.3.9. Bolfuncties

We gaan nu voor iedere gehele $j \geqslant 0$ een irreducibele unitaire representatie met gewicht j van de draaiingsgroep construeren. Beschouw de rotatie g_1 die $\vec{x} \in R_3$ transformeert in $\vec{x}'$, dus $\vec{x}' = g_1\vec{x}$. We bekijken functies $f(\vec{x}) = f(x_1,x_2,x_3)$, en we definiëren

$$(3.43)\qquad T(g_1)f(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} f(g_1^{-1}\vec{x}).$$

We gebruiken hiervoor ook de notatie $T(g_1)f(\vec{x}) = f_1(\vec{x})$. Dan geldt

$$T(g_2)T(g_1)f(\vec{x}) = T(g_2)f_1(\vec{x}) = f_1(g_2^{-1}\vec{x}) = f(g_1^{-1}g_2^{-1}\vec{x}) =$$
$$= T(g_2g_1)f(\vec{x}).$$

Blijkbaar is T(g) dus een representatie van de draaiingsgroep. Nu beschouwen we de Hilbertruimte R van functies gedefinieerd op de eenheidsbol (dus $f(\vec{x}) = f(\Theta,\varphi)$) waarvoor het inwendig product

$(f_1,f_2) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta,\varphi)\overline{f_2(\theta,\varphi)} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$ bestaat. Dan is

$$(T(g)f_1, T(g)f_2) = (f_1,f_2) \qquad \text{(verg. (*) pag.16)},$$

dus T is op R een unitaire representatie.

We zoeken nu de operatoren op R die corresponderen met infinitesimale rotaties van R_3. Voor een rotatie g_z over een hoek α om de z-as geldt:

$$T(g_z) = I + \alpha A_3 + \dots \quad .$$

Om A_3 te vinden moeten we dus de coëfficiënt van α zoeken in de ontwikkeling van $T(g_z)$.

Verder volgt uit (3.43):

$$T(g_z)f(\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi-\alpha).$$

Ontwikkelen hiervan geeft

$$T(g_z)f(\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi) - \alpha \frac{\partial f(\theta,\varphi)}{\partial\varphi} + \dots$$

zodat we vinden

$$A_3 = -\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad . \tag{3.44}$$

Om A_1 te vinden gaan we als volgt te werk:

g_x stelt een draaiing voor om de x-as over een hoek α. Dan is A_1 de coëfficiënt van αf in de ontwikkeling

$$T(g_x)f(\theta,\varphi) = f(\theta',\varphi') = f(\theta,\varphi) + \left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial\theta'}{\partial\alpha} + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi'}{\partial\alpha}\right)\Bigg|_{\alpha=0} \alpha + \dots \tag{3.45}$$

Nu geldt

$$x_1' = \sin\theta' \cos\varphi', \quad x_2' = \sin\theta' \sin\varphi', \quad x_3' = \cos\theta' \tag{3.46}$$

zodat

$$(3.47)\quad \begin{cases} \left.\dfrac{\partial x_1'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = \cos\Theta\cos\varphi \left.\dfrac{\partial\Theta'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} - \sin\Theta\sin\varphi \left.\dfrac{\partial\varphi'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} \\ \left.\dfrac{\partial x_2'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = \cos\Theta\sin\varphi \left.\dfrac{\partial\Theta'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} + \sin\Theta\cos\varphi \left.\dfrac{\partial\varphi'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} \\ \left.\dfrac{\partial x_3'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = -\sin\Theta \left.\dfrac{\partial\Theta'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} \end{cases}$$

Ook weten we uit (3.43):

$$T(g_x)f(\vec{x}) = f(g_x^{-1}\vec{x}) = f(x_1',x_2',x_3') =$$

$$= f(x_1, x_2\cos\alpha + x_3\sin\alpha, -x_2\sin\alpha + x_3\cos\alpha).$$

Hieruit zien we:

$$(3.48)\qquad \left.\frac{\partial x_1'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial x_2'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = x_3 \qquad \left.\frac{\partial x_3'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = -x_2 .$$

Substitueren we (3.48) in (3.47) en drukken we in het resultaat x_2 en x_3 uit in Θ en φ dan krijgen we een stelsel vergelijkingen voor $\left.\frac{\partial\Theta'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}$ en $\left.\frac{\partial\varphi'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}$ waarvan de oplossing is:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial\Theta'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = \sin\varphi \\ \left.\dfrac{\partial\varphi'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = \operatorname{ctg}\Theta\cos\varphi. \end{cases}$$

Samen met (3.45) levert dit

$$(3.49)\qquad A_1 = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\Theta} + \operatorname{ctg}\Theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} .$$

A_2 kunnen we vinden via een dergelijke berekening, of sneller door $\varphi - \frac{\pi}{2}$ te nemen i.p.v. φ :

(3.50) $$A_2 = -\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\Theta} + \operatorname{ctg}\Theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} .$$

We voeren weer operatoren H_+, H_- en H_3 in die volgens (3.21) en (3.23) gedefinieerd zijn. Hiervoor vinden we met behulp van (3.44), (3.49) en (3.50)

(3.51) $$\begin{cases} \text{(a)} & H_+ = e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\Theta} + i \operatorname{ctg}\Theta \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ \text{(b)} & H_- = e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\Theta} + i \operatorname{ctg}\Theta \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ \text{(c)} & H_3 = -i \frac{\partial}{\partial\varphi} . \end{cases}$$

Om de representatie $T(g)$ te splitsen in irreducibele representaties kunnen we te werk gaan als in II.3.7 (p.33):

$$L \overset{\text{def}}{=} \left\{ f \,\middle|\, f \in R,\ H_+ f = 0 \right\} .$$

In L zoeken we een volledig orthonormaal stelsel eigenvectoren van H_3 enz.

We vinden dan weer representaties met gewicht $j_1, j_2 \dots$. Functies die in de bij j_k behorende invariante deelruimte R_{j_k} van R liggen noemen we <u>bolfuncties</u> van de orde j_k. De elementen van de canonische basis in R_j noemen we <u>hoofdbolfuncties van de orde j</u>. Deze geven we aan met $Y_j^m(\Theta,\varphi)$ waarin m de bijbehorende eigenwaarde van H_3 is, dus $-j \leqslant m \leqslant j$. Uit (3.51c) en $H_3 Y_j^m(\Theta,\varphi) = m\, Y_j^m(\Theta,\varphi)$ volgt als mogelijke oplossing

(3.52) $$Y_j^m(\Theta,\varphi) = Ce^{im\varphi} F_j^m(\Theta)$$

waarin $F_j^m(\Theta)$ nog nader te bepalen is.
Als we eisen

(3.52a) $$\int_0^{\pi} \left| F_j^m(\Theta) \right|^2 \sin\Theta \, d\Theta = 1$$

moeten we $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ nemen, opdat $Y_j^m(\Theta,\varphi)$ genormeerd is in R.

We zoeken nu de differentiaalvergelijking waaraan $F_j^m(\Theta)$ voldoet. Hiertoe beschouwen we de operator

$$H^2 \stackrel{\text{def}}{=} H_1^{\,2} + H_2^{\,2} + H_3^{\,2}.$$

Hiervoor geldt

$$[H^2,H_1] = [H^2,H_2] = [H^2,H_3] = 0\ . \tag{3.53}$$

We bewijzen de laatste van deze gelijkheden:

$$[H^2,H_3] = [H_1^{\,2},H_3] + [H_2^{\,2},H_3] = H_1[H_1,H_3] + [H_1,H_3]\,H_1 +$$
$$+ H_2[H_2,H_3] + [H_2,H_3]\,H_2 = -iH_1H_2 - iH_2H_1 + iH_2H_1 + iH_1H_2 = 0.$$

Uit (3.53) en (3.15) volgt

$$H^2T(g) = T(g)H^2 \qquad \text{voor alle } g \in G.$$

Als T irreducibel is moet volgens het lemma van Schur (St.4 pag.4) gelden

$$H^2 = \lambda\, I. \tag{3.54}$$

Om λ te vinden passen we H^2 toe op f_{-j}. (3.54) levert:

$$H^2f_{-j} = \lambda\, f_{-j}\ . \tag{3.55}$$

Tevens geldt:

$$H^2f_{-j} = (H_1^{\,2}+H_2^{\,2}+H_3^{\,2})f_{-j} =$$
$$= \left\{(H_1+iH_2)(H_1-iH_2)+i[H_1,H_2] + H_3^{\,2}\right\} f_{-j} =$$
$$= H_+H_-f_{-j}-H_3f_{-j}+H_3^{\,2}f_{-j} = j(j+1)f_{-j}$$

want $H_-f_{-j}=0$, $H_3f_{-j}=-jf_{-j}$.

Samen met (3.55) levert dit

$$\lambda = j(j+1),$$

d.w.z. dat volgens (3.54) voor $f = \sum_{m=-j}^{j} c_m f_m$ geldt

(3.56) $$H^2 f = j(j+1)f.$$

Anderzijds vinden we uit de relatie $H^2 = H_+H_- - H_3+H_3^2$ met gebruikmaking van (3.51)

$$H^2 f = -\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\frac{\partial f}{\partial\Theta}) - \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}.$$

Samen met (3.56) levert dit

(3.57) $$\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\frac{\partial f}{\partial\Theta}) + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + j(j+1)f = 0.$$

Dit is de z.g. vergelijking van de bolfuncties van de orde j.
Er zal blijken dat er juist 2j+1 op de bolcontinueeen differentieerbare oplossingen zijn. Substitueren we (3.52) met $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ in (3.57) dan krijgen we na vereenvoudiging

(3.58) $$\frac{1}{\sin\Theta}\frac{d}{d\Theta}(\sin\Theta\frac{dF_j^m(\Theta)}{d\Theta}) + \left\{j(j+1) - \frac{m^2}{\sin^2\Theta}\right\}F_j^m(\Theta) = 0.$$

Voeren we de nieuwe variabelen in

$$x \overset{def}{=} \cos\Theta \text{ en } P_j^m(x) \overset{def}{=} F_j^m(\Theta)$$

dan vinden we de vergelijking

(3.59) $$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{d}{dx}P_j^m(x)\right\} + \left\{j(j+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\}P_j^m(x) = 0,$$

de z.g. geassocieerde Legendre vergelijking. We weten dat eindige en éénwaardige oplossingen alleen bestaan voor gehele waarden van j.
Volgens (3.52) zijn de hoofdbolfuncties dus éénwaardige functiės van φ.
We moeten zodanige oplossingen hebben dat de $Y_j^m(\Theta,\varphi)$ een canonische basis vormen, dat wil zeggen dat voor m=j moet gelden

$$\begin{cases} H_3\, Y_j^j(\theta,\varphi) = j\, Y_j^j(\theta,\varphi) \\ H_+\, Y_j^j(\theta,\varphi) = 0. \end{cases}$$

We weten al dat de eerste van deze beide de oplossing heeft

$$Y_j^j(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ij\varphi}\, F_j^j(\theta).$$

Dit in de tweede vergelijking gesubstitueerd geeft met (3.51a)

$$\frac{dF_j^j(\theta)}{d\theta} - j \operatorname{ctg}\theta\, F_j^j(\theta) = 0.$$

De algemene oplossing is

$$F_j^j(\theta) = C \sin^j\theta,$$

waaruit we meteen zien:

Voor iedere j is er één en slechts één irreducibele representatie van gewicht j.

De eis (3.52a) levert de waarde van C. De overige functies $Y_j^m(\theta,\varphi)$ vinden we uit

$$H_- Y_j^m(\theta,\varphi) = \alpha_m Y_j^{m-1}(\theta,\varphi)$$

(verg.(3.26)). Hier wordt H_- gegeven door (3.51b).

Door rekenen geeft dan de formule

$$P_j^m(x) = \sqrt{\frac{(j+m)!}{(j-m)!}}\ \sqrt{\frac{2j+1}{2}}\ \frac{1}{2^j . j!}\ (1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\ \frac{d^{j-m}}{dx^{j-m}}\ (x^2-1)^j \qquad (3.60)$$

waarin $m=-j,-j+1,\dots,j$.

Dit zijn de geassocieerde Legendre polynomen van de orde j met nog een in dit geval nodige normeringsconstante.

We hebben dus bewezen:

Stelling II.8.

De hoofdbolfuncties van de orde j hebben de vorm

$$Y_j^m(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{im\varphi}\, P_j^m(\cos\theta) \qquad m=j,j-1,\ldots,-j$$

waarin $P_j^m(\cos\theta)$ wordt gedefinieerd door (3.60). Voor vaste j ($j=0,1,2,\ldots$) spannen de functies $Y_j^m(\theta,\varphi)$ een $2j+1$ dimensionale ruimte R_j op waarop een irreducibele representatie met gewicht j van de draaiingsgroep werkt.
De operatoren van deze representatie zijn daarbij gedefinieerd door (3.43), waarin $|\vec{x}| = 1$.

Ontwikkeling van functies $f(\theta,\varphi)$ in bolfuncties

Laat $f(\theta,\varphi) \in R$, waarin R de eerder gedefinieerde Hilbertruimte is. Als gevolg van stelling II.2 (pag.11) is dan $f(\theta,\varphi)$ te schrijven als een in het gemiddelde convergerende reeks van bolfuncties

$$f = \emptyset_o + \emptyset_1 + \emptyset_2 + \ldots \tag{3.61}$$

waarin $\emptyset_j \in R_j$. R_j stelt hier de in stelling II.8 genoemde ruimte voor, dus

$$\emptyset_j = \sum_{m=-j}^{j} C_j^m\, Y_j^m(\theta,\varphi).$$

De functies $Y_j^m(\theta,\varphi)$ zijn onderling orthogonaal (zie de opm. over St.5 op pag.10, en stelling II.1 pag.11).
We kunnen dit samenvatten in de

Stelling II.9: In de Hilbertruimte R van op de bol kwadratisch integreerbare functies vormt het stelsel $\left\{ Y_j^{m_j}(\theta,\varphi)\right\}$ ($j=0,1,2,\ldots$; $-j \leq m_j \leq j$) een volledige orthonormale basis.

II.3.10. De expliciete vorm van de representatiematrix. Gegeneraliseerde bolfuncties

We hebben bolfuncties gevonden als elementen van een Hilbertruimte waarop een groep van operatoren werkt die een irreducibele representatie van de draaiingsgroep voorstelt. De matrixelementen $T_{mn}(g)$ van een irreducibele representatie $T(g)$ kunnen we op analoge wijze vinden. We beschouwen daartoe deze matrixelementen voor vaste m zelf weer als elementen van een ruimte, waarop een groep van operatoren werkt die het homomorfe beeld is van de draaiingsgroep. Dit procédé zal niet alleen gehele, maar ook halftallige j waarden te voorschijn brengen.

De matrixelementen $T_{mn}(g)$ $(-j \leq m,n \leq j)$ zijn functies van g. Neem een willekeurige vaste rotatie g_1, en definieer

(3.62) $$U_{g_1} T_{mn}(g) \stackrel{def}{=} T_{mn}(gg_1).$$

We noteren dit als $T_{mn}(gg_1) = T'_{mn}(g)$. Dan geldt:

$$U_{g_2} U_{g_1} T_{mn}(g) = U_{g_2} T'_{mn}(g) = T'_{mn}(gg_2) = T_{mn}(gg_2g_1),$$

dus

(3.62a) $$U_{g_2} U_{g_1} T_{mn}(g) = U_{g_2g_1} T_{mn}(g).$$

We weten $T(gg_1) = T(g)T(g_1)$, d.w.z. $T_{mn}(gg_1) = \sum_{s=-j}^{j} T_{ms}(g)T_{sn}(g_1)$, dus ook

(3.63) $$U_{g_1} T_{mn}(g) = \sum_{s=-j}^{j} T_{ms}(g)T_{sn}(g_1).$$

Beschouwen we de functies $T_{mn}(g)$ voor vaste m als eenheidsvectoren e_n^m in een ruimte R^m, dan transformeert U_{g_1} blijkbaar R^m in zichzelf. (3.63) is te schrijven als

(3.64) $$U_{g_1} e_n^m = \sum_{s=-j}^{j} T_{sn}(g_1)e_s^m ,$$

waaruit blijkt dat U_{g_1} op R^m juist zo werkt als de matrix $T(g_1)$. Omdat de matrix $T(g_1)$ de eenheidsvectoren precies zo transformeert als de canonische basisvectoren (in welke basis uitgedrukt de representatie juist de vorm T heeft) is de basis $T_{mn}(g)$ $(-j \leq n \leq j)$ juist de canonische basis in R^m.

Samen met (3.62a) en de irreducibiliteit van T levert dit op, dat U op R^m een irreducibele representatie is van de draaiingsgroep.

We gaan nu de met infinitesimale draaiingen corresponderende operatoren zoeken.

Laat g een draaiing zijn met Eulerse parameters $\varphi_1,\theta,\varphi_2$, g_1 een draaiing om een willekeurige as over een kleine hoek α. Dan geldt

$$U_{g_1} T_{mn}(g) = T_{mn}(gg_1) = T_{mn}(\varphi_1',\theta',\varphi_2')$$

dus

$$(3.65) \qquad U_{g_1} T_{mn}(g) = T_{mn}(\varphi_1,\theta,\varphi_2) + \\ + \left(\frac{\partial T_{mn}}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1'}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{mn}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta'}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{mn}}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2'}{\partial \alpha} \right) \Bigg|_{\alpha=0} \alpha + \dots$$

De operator A_3 vinden we door als as van g_1 de z-as te nemen en de coëfficiënt van αT_{mn} te zoeken in de bijbehorende ontwikkeling (3.65).

De draaiing gg_1 heeft nu de parameters $\varphi_1+\alpha,\theta,\varphi_2$.

In dit geval vinden we uit (3.65)

$$U_{g_1} T_{mn}(g) = T_{mn}(g) + \alpha \frac{\partial T_{mn}}{\partial \varphi_1} + \dots$$

zodat

$$(3.66) \qquad A_3 = \frac{\partial}{\partial \varphi_1} .$$

Voor de matrix gg_1 kunnen we schrijven

$$(3.67) \qquad gg_1 = (g_{kl}(\varphi_1',\theta',\varphi_2')) = (g_{kl}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)) + \\ + \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1'}{\partial \alpha} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta'}{\partial \alpha} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2'}{\partial \alpha} \right) \Bigg|_{\alpha=0} \alpha + \dots$$

Om A_1 te vinden moeten we als as van g_1 de x-as nemen. Dan hebben we:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha + \dots$$

dus

$$gg_1 = (g_{kl}) + \begin{pmatrix} 0 & g_{13} & -g_{12} \\ 0 & g_{23} & -g_{22} \\ 0 & g_{33} & -g_{32} \end{pmatrix} \alpha + \dots \tag{3.68}$$

Bovendien kennen we g als functie van de Eulerse parameters ((3.2) pag.15). Vergelijken we de elementen met indices 33, 31 en 13, van de coëfficiënten van α in (3.67) en (3.68), en nemen we de benodigde elementen g_{kl} uit (3.2), dan vinden we

$$\left\{\begin{array}{lcl} -\sin\theta \left.\dfrac{\partial\theta'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} & & = \\ \sin\varphi_1 \cos\theta \left.\dfrac{\partial\theta'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} & + \cos\varphi_1 \sin\theta \left.\dfrac{\partial\varphi_1'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} & = \\ \sin\varphi_2 \cos\theta \left.\dfrac{\partial\theta'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} & + \cos\varphi_2 \sin\theta \left.\dfrac{\partial\varphi_2'}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} & = \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} = -\cos\varphi_1 \sin\theta \\ = 0 \\ = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\theta \end{array}\right.$$

waarvan de oplossing is

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\dfrac{d\varphi_1'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = -\sin\varphi_1 \operatorname{ctg}\theta \\ \left.\dfrac{d\theta'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \cos\varphi_1 \\ \left.\dfrac{d\varphi_2'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\theta} . \end{array}\right.$$

Door sibstitutie hiervan in (3.65) zien we:

$$A_1 = -\mathrm{ctg}\,\Theta \sin\varphi_1 \frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\sin\varphi_1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \cos\varphi_1 \frac{\partial}{\partial\Theta}\,.$$

Voor A_2 vinden we op analoge wijze

$$A_2 = -\,\mathrm{ctg}\,\Theta \cos\varphi_1 \frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\cos\varphi_1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\varphi_2} - \sin\varphi_1 \frac{\partial}{\partial\Theta}\,.$$

Dit levert m.b.v. (3.21) en (3.23)

$$(3.69)\quad \begin{cases} \text{(a)} & H_+ = e^{-i\varphi_1}\left(\mathrm{ctg}\,\Theta \dfrac{\partial}{\partial\varphi_1} - \dfrac{1}{\sin\Theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi_2} + i\dfrac{\partial}{\partial\Theta}\right) \\ \text{(b)} & H_- = e^{i\varphi_1}\left(-\mathrm{ctg}\,\Theta \dfrac{\partial}{\partial\varphi_1} + \dfrac{1}{\sin\Theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi_2} + i\dfrac{\partial}{\partial\Theta}\right) \\ \text{(c)} & H_3 = i\dfrac{\partial}{\partial\varphi_1} \end{cases}$$

We kunnen dan weer H^2 vinden en gebruiken de relatie $H^2=j(j+1)I$ (verg.(3.56)). Dit geeft voor de matrixelementen $T_{mn}(g)$ (de basisvectoren van de ruimte R^m) de differentiaalvergelijking

$$(3.70)\quad \frac{\partial^2 T_{mn}(g)}{\partial\Theta^2} + \mathrm{ctg}\,\Theta \frac{\partial T_{mn}(g)}{\partial\Theta} + \frac{1}{\sin^2\Theta}\left(\frac{\partial^2 T_{mn}(g)}{\partial\varphi_1^2} - 2\cos\Theta\frac{\partial^2 T_{mn}(g)}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} + \frac{\partial^2 T_{mn}(g)}{\partial\varphi_2^2}\right) + j(j+1)T_{mn}(g) = 0.$$

Van $T_{mn}(g)$ weten we al iets. We hebben namelijk $g(\varphi_1,\Theta,\varphi_2) = g_{\varphi_2} g_\Theta g_{\varphi_1}$, dus $T(g) = T_{\varphi_2} T_\Theta T_{\varphi_n}$, wat samen met (3.42) levert (p.15),

$$(3.71)\quad T_{mn}(\varphi_1,\Theta,\varphi_2) = e^{-im\varphi_2} u_{mn}(\Theta) e^{-in\varphi_1}\,,$$

waarin $u_{mn}(\Theta)$ een element van de matrix T_Θ voorstelt (rijen en kolommen nummeren van $-j$ tot j).

Substitutie van (3.71) in (3.70) geeft na vereenvoudiging (verg. (3.58))

$$\frac{d^2u_{mn}}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{du_{mn}}{d\theta} + \left\{ j(j+1) - \frac{n^2-2mn\cos\theta+m^2}{\sin^2\theta} \right\} u_{mn} = 0.$$

Deze vergelijking is om te vormen tot de hypergeometrische vergelijking. Hierop gaan we niet nader in.

We kunnen namelijk de elementen van de matrix T_θ op andere wijze vinden. Voor iedere waarde van m geldt

$$H_3T_{mn}(\varphi_1,\theta,\varphi_2) = n\, T_{mn}(\varphi_1,\theta,\varphi_2).$$

Bovendien moet

$$H_+T_{mj}(\varphi_1,\theta,\varphi_2) = 0 \qquad \text{(verg. (3.27))}.$$

We gaan nu te werk als op pag.42 . We vinden m.b.v. (3.69a) een differentiaalvergelijking voor $T_{mj}(g)$. Na substitutie hierin van (3.71) en vereenvoudiging vinden we

$$\frac{du_{mj}(\theta)}{d\theta} + \frac{m-j\cos\theta}{\sin\theta} u_{mj}(\theta) = 0$$

waarvan de oplossing is

$$u_{mj}(\theta) = C_m \frac{\sin^j\theta}{\operatorname{tg}^m \frac{\theta}{2}}. \tag{3.72}$$

We zien dat er voor iedere j één en slechts één irreducibele representatie is met gewicht j. Schrijven we $x \overset{\text{def}}{=} \cos\theta$, $P_{mn}(x) \overset{\text{def}}{=} u_{mn}(\theta)$ dan wordt (3.72)

$$P_{mj}(x) = C_m(1-x)^{\frac{j-m}{2}}(1+x)^{\frac{j+m}{2}}. \tag{3.73}$$

Samen met (3.71) levert dit de j^e kolom van de matrix T (de rechterkolom). De andere kolommen vinden we uit

$$H_-T_{mn}(\varphi_1,\theta,\varphi_2) = \alpha_n T_{m,n-1}(\varphi_1,\theta,\varphi_2) \qquad \text{(verg. (3.33))},$$

waarin we (3.69b) en (3.71) kunnen gebruiken. Voor $P_{mn}(x)$ schrijven we verder $P^j_{mn}(x)$. Deze functies zijn te berekenen m.b.v. het voorgaande. De constanten C_m $(m=-j,-j+1,\dots,j)$ zijn te vinden m.b.v. de overweging dat $g(0,0,0) = I$, dus dat $T_{mm}(0,0,0) = 1$.
We vinden uiteindelijk:
Als $T^j(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$ de irreducibele representatie met gewicht j voorstelt van de draaiingsgroep, zijn de matrixelementen in de canonische basis uit te drukken als volgt:

$$(3.74) \qquad T^j_{mn}(\varphi_1,\theta,\varphi_2) = e^{-im\varphi_2} P^j_{mn}(\cos\theta) e^{-in\varphi_1} \qquad (-j \leq m,\ n \leq j)$$

waarin

$$P^j_{mn}(x) = \frac{(-1)^{j-m} i^{n-m}}{2^j (j-m)!} \sqrt{\frac{(j-m)!\,(j+n)!}{(j+m)!\,(j-n)!}}\ (1-x)^{-\frac{n-m}{2}} (1+x)^{-\frac{n+m}{2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{d^{j-n}}{dx^{j-n}} \left\{ (1-x)^{j-m} (1+x)^{j+m} \right\}.$$

Zie voor de afleiding bijv. p.276 e.v. van het op pag.20 genoemde artikel van Gel'fand en Shapiro.
Natuurlijk zijn de in II.3.8 (p.33 e.v.) genoemde voorbeelden speciale gevallen van (3.74), resp. voor $j=0$, $j=\frac{1}{2}$ en $j=1$. We moeten er daarbij om denken dat m en n lopen van $-j$ tot j. We vinden zo voor $j=1$ de matrix (3.2) uitgedrukt in de canonische basis:

$$g(\varphi_1,\theta,\varphi_2)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\, e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}(1+\cos\theta) & -\frac{i}{\sqrt{2}}\, e^{-i\varphi_2}\sin\theta & \frac{1}{2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}(\cos\theta-1) \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\, e^{-i\varphi_1}\sin\theta & \cos\theta & -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi_1}\sin\theta \\ \frac{1}{2}\, e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)}(\cos\theta-1) & -\frac{i}{\sqrt{2}}\, e^{i\varphi_2}\sin\theta & \frac{1}{2} e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}(1+\cos\theta) \end{pmatrix}$$

We noemen nog de relatie

$$T^j_{on}(\ _1,\theta,\ _2) = \sqrt{\frac{2}{2j+1}}\ Y^n_j(\tfrac{\pi}{2} - \varphi_1,\theta).$$

De matrix T^j heeft uiteraard alleen voor gehele j een rij met m=0. De tweewaardigheid voor halftallige j is al ter sprake gekomen voor $j=\frac{1}{2}$

(verg.p.19-20). Voor $j=\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ geldt uiteraard iets dergelijks. Voor recurrente betrekkingen tussen de $T^j_{mn}(x)$ zie men bijv. het genoemde artikel van Gel'fand en Shapiro.

Ontwikkeling van functies $f(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$ in gegeneraliseerde bolfuncties

Dit gaat analoog aan het op pag.43 behandelde. De functies f zijn elementen van een Hilbertruimte R als het scalaire product

$$(3.75) \qquad (f_1, f_2) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(f_1\overline{f_2})$$

(verg.(3.3)) zin heeft.

In overeenstemming met (3.62) e.v. vormen de transformaties $U_{g_1} f(g) \stackrel{\text{def}}{=} f(gg_1)$ op R een representatie van de draaiingsgroep, die volgens II.3.3 (pag.13) unitair is. Deze representatie heet de <u>reguliere representatie</u> van de draaiingsgroep.

Dat er voor iedere j één en slechts één ~~irreducibele representatie is~~, is al n.a.v. (3.72) opgemerkt.

We hebben tenslotte voor R het volgende analogon van stelling II.9:

<u>Stelling II.10</u>: In de Hilbertruimte R van op de rotatiegroep kwadratisch integreerbare functies vormt het stelsel $\left\{ T^j_{m_j,n_j}(\varphi_1,\theta,\varphi_2) \right\}$ $(j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\ldots, -j \leqslant m_j,n_j \leqslant j)$ een volledige orthonormale basis.

II.4. Het product van representaties

door C.P. Korthals Altes

II.4.1. Algemene opmerking

We zullen in het hier volgende zien dat we twee representaties tot een derde kunnen combineren, het "Kronecker product" van de eerste twee.

Voorts zal blijken, dat een groot aantal representaties producten in deze zin zijn van irreducibele; voorbeelden zijn de tensorrepresentaties van de draaigroep, die producten zijn van irreducibele representaties met gewicht 1, en de spinorrepresentaties, product van irreducibele representaties met gewicht $\frac{1}{2}$.

II.4.2. Kronecker product van lineaire ruimtes en representaties. Direct product in groepstheoretisch verband.

Zijn gegeven twee lin. ruimten met inproduct R^p en R^q (dimensie resp. p en q), en zijn orthonormale bases in R^p en R^q resp. $e_1,\dots,e_p$ en $f_1,\dots,f_q$, dan heet de verzameling R van alle lineaire combinaties

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, e_i\, f_j$$

het Kronecker of tensor product van de ruimtes R^p en R^q.

Notatie: $R = R^p \times R^q$.

Opmerkingen:

1. We zien dat een elnt $h \in R$ bepaald wordt door pq getalletjes a_{ij}, de dimensie van R is dan pq.
2. Nemen we als inwendig product in R:

   als $h = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, e_i\, f_j$

   en $g = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} b_{ij}\, e_i\, f_j$

   dan is $(h,g) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,k} \sum_{j,l} a_{ij}\, \overline{b_{kl}} (e_i f_j, e_k f_l) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,k} \sum_{j,l} a_{ij}\, \overline{b}_{kl}$

   $(e_i, e_k)(f_j, f_l)$.

   De $e_i f_j$ vormen dan een orthonormaal stelsel in R.

We gaan nu het Kronecker product van twee representaties van eenzelfde groep definiëren:

<u>Stelling II.4.2.</u> Zijn $D^{(p)}$ en $D^{(q)}$ representaties van een groep G in resp. R^p en R^q, dan vormt de matrixverzameling D gedefinieerd door:

$$D(g)e_i f_j \overset{def}{=} D^{(p)}(g)e_i \, D^{(q)}(g)f_j$$

een representatie van G werkend in $R = R^p \times R^q$, de zgn. productrepresentatie van $D^{(p)}$ en $D^{(q)}$, waarbij we $D(g)h = D(g) \sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij} e_i f_j \equiv \sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij} D(g)e_i f_j$ definiëren. Want:

$$\begin{aligned}
D(g')D(g)h &= \sum_i \sum_j a_{ij} \, D(g')D(g)e_i f_j = \\
&= \sum_i \sum_j a_{ij} \, D(g')(D^{(p)}(g)e_i \, D^{(q)}(g)f_j) \\
&= \sum_i \sum_j a_{ij} (D^{(p)}(g')D^{(p)}(g)e_i . D^{(q)}(g')D^{(q)}(g)f_j) \\
&= \sum_i \sum_j a_{ij} \, D^{(p)}(g'g)e_i . D^{(q)}(g'g)f_j \\
&= \sum_i \sum_j a_{ij} \, D(g'g)e_i f_j \\
&= D(g'g)h \quad .
\end{aligned}$$

In matrixtaal:

$D^{(p)}(g) = (D^{(p)}_{ri}(g))$ op de basis $e_1,\dots,e_p$:

$$D^{(p)}(g)e_i = \sum_{r=1}^{p} D^{(p)}_{ri}(g)e_r$$

en $D^{(q)}(g) = (D^{(q)}_{sk}(g))$ op de basis $f_1,\dots,f_q$:

$$D^{(q)}(g)f_k = \sum_{s=1}^{q} D^{(q)}_{sk}(g)f_s \quad .$$

Dan wordt de matrix van D(g) op de basis $e_1 f_1,\dots,e_p f_q$:

$$D(g)e_i f_k = D^{(p)}(g)e_i \; D^{(q)}(g)f_k =$$

$$= \sum_{r=1}^{p} D^{(p)}_{ri}(g)e_r \; D^{(q)}_{sk}(g)f_r =$$

$$= \sum_{r=1}^{p} \; \sum_{s=1}^{q} D^{(p)}_{ri}(g) \; D^{(q)}_{sk}(g)e_r f_s$$

zodat het matrixelement

$$D_{rs;ik}(g) = D^{(p)}_{ri}(g) \; D^{(q)}_{sk}(g)$$

en dus $a'_{ik} = \sum_{r=1}^{p} \; \sum_{s=1}^{q} D^{(p)}_{ri}(g) \; D^{(q)}_{sk}(g) \; a_{rs}$

als $h' = D(g)h = \sum_{i} \; \sum_{k} a'_{ik} \; e_i \; f_k$.

Stelling II.4.2:
Zijn $D^{(p)}$ en $D^{(q)}$ unitaire representaties, dan is $D^p \times D^q$ unitair.

Bewijs:
Nodig en voldoende voor de unitairiteit van $D = D^{(p)} \times D^{(q)}$ is:

$$(D(g)e_i f_j, \; D(g)e_k f_l) = (e_i f_j, e_k f_l).$$

Uit de definitie van het inproduct voor R blijkt:

$$(e_i f_j, e_k f_l) = (e_i, e_k)(f_j, f_l)$$

zodat:

$$(D(g)e_i f_j, \; D(g)e_k f_l) = (D^{(p)}(g)e_i \; D^{(q)}(g)f_j, \; D^{(p)}(g)e_k \; D^{(q)}(g)f_l)$$

$$= (D^{(p)}e_i, \; D^{(p)}e_k)(D^{(q)}(g)f_j, \; D^{(q)}(g)f_l)$$

$$= (e_i, e_k)(f_j, f_l).$$

Definitie II 4.1.

Zijn F en G twee groepen met elnten resp. F_α en G_β α en β uit indexverzamelingen resp. A en B.

De groep H heet het direct product van F en G als we de volgende eigenschappen voor H vaststellen:

$$H_{\alpha\beta} \equiv (F_\alpha, G_\beta) \qquad (1)$$

$$H_{\alpha_1\beta_1} \cdot H_{\alpha_2\beta_2} \equiv (F_{\alpha_1}F_{\alpha_2}, G_{\beta_1}G_{\beta_2}) \qquad (2)$$

We kunnen eenvoudig inzien dat H inderdaad een groep vormt t.o.v. deze vermenigvuldiging 2 :

associativiteit: $(H_{\alpha_1\beta_1} H_{\alpha_2\beta_2})H_{\alpha_3\beta_3} = ((F_{\alpha_1}F_{\alpha_2})F_{\alpha_3}, (G_{\beta_1}G_{\beta_2})G_{\beta_3}) =$

$$= (F_{\alpha_1}(F_{\alpha_2}F_{\alpha_3}), G_{\beta_1}(G_{\beta_2}G_{\beta_3})) =$$

$$\overset{!}{=} H_{\alpha_1\beta_1}(H_{\alpha_2\beta_2}H_{\alpha_3\beta_3})$$

eenheidselement: $H_{\alpha_o\beta_o}.H_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} \quad \forall\alpha,\beta \iff \begin{cases} F_{\alpha_o} \text{ is eenheid in } F \\ G_{\alpha_o} \text{ is eenheid in } G \end{cases}$

inverse element: $(H_{\alpha\beta})^{-1}H_{\alpha\beta} = H_{\alpha_o\beta_o} \quad \forall\alpha,\beta \iff (H_{\alpha\beta})^{-1} = (F_\alpha^{-1}, G_\beta^{-1})$.

<u>Gevolgen</u>:

H is homomorf af te beelden op $\{(F_{\alpha_o}, G_\beta)\}_{\beta \in B}$, waarbij F_{α_o} het eenheidselement van F is:

$$H_{\alpha\beta} \longrightarrow (F_{\alpha_o}, G_\beta), \text{ dus:}$$

$$H_{\alpha_1\beta_1} H_{\alpha_2\beta_2} \longrightarrow (F_{\alpha_o}, G_{\beta_1}G_{\beta_2}) \overset{!}{=} (F_{\alpha_o}, G_{\beta_1})(F_{\alpha_o}, G_{\beta_2}).$$

Voor h is $\{(F_{\alpha_o}, G_\beta)\}_{\beta \in B}$ triviaal isomorf met G zodat we kunnen stellen:

1. Iedere representatie van G is een representatie van H. Hetzelfde geldt voor de groep F.
2. $\{(F_{\alpha_o}, G_\beta)\}_{\beta \in B}$ en $\{(F_\alpha, G_{\beta_o})\}_{\alpha \in A}$ zijn normaaldelers in H en hun elementen commuteren met elkaar.

Zijn D(F) en D(G) representaties van resp. F en G, dan is het direct product D(F) $\times$ D(G) een representatie van H=F G.

Want D(F) en D(G) kunnen ieder als representatie van H opgevat worden, zodat de bewering volgens stelling II 4.1. juist is.

Stelling II 4.3.

Zijn de representaties D(F) en D(G) irreducibel, dan is de representatie D(F) $\times$ D(G) een irreducibele representatie van H=F $\times$ G.

Bewijs:

Noem de matrix behorend bij groepselement $F_\alpha \in F$: $D(F_\alpha)$ en die behorend bij $G_\beta \in G$: $D(G_\beta)$.

Voorts is als $D(H_{\alpha\beta})$ de matrix is behorend bij $H_{\alpha\beta}$:

$$D(H_{\alpha\beta}) = D(F_\alpha) \times D(G_\beta)$$

ofwel:
$$D_{kl;rs}(H_{\alpha\beta}) = D_{kr}(F_\alpha)D_{ls}(G_\beta).$$

Beschouw een pq $\times$ pq matrix S die commuteert met de representatie D(H):

$$SD(H_{\alpha\beta}) = D(H_{\alpha\beta})S \qquad \forall \alpha \in A \text{ en } \beta \in B$$

d.w.z.: voor het element "ij;rs" van dit matrixproduct geldt:

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} s_{ij;kl}\, D_{kr}(F_\alpha)D_{ls}(G_\beta) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} D_{ik}(F_\alpha)D_{jl}(G_\beta) \cdot s_{kl;rs}$$

Zijn nu F_{α_o} en G_{β_o} eenheidslementen resp. in F en G, dan zijn $D(F_{\alpha_o})$ en $D(F_{\beta_o})$ eenheidsmatrices:

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} s_{ij;kl}\, \delta_{kr}\, D_{ls}(G_\beta) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} \delta_{ik}\, D_{jl}(G_\beta)s_{kl;rs}$$

ofwel:
$$\sum_{l=1}^{q} s_{ij;rl}\, D_{ls}(G_\beta) = \sum_{l=1}^{q} D_{ji}(G_\beta)s_{il;rs} \quad . \qquad (1)$$

Neem i en r vast en beschouw de q $\times$ q matrix $s^{(i,k)}$; volgens (1) commuteert $s^{(i,k)}$ met $D(G_\beta)$, die een irreducibele representatie vormt. Dan is $g^{(i,k)}$ een veelvoud van de eenheidsmatrix, zodat $s^{(i,k)} =$ $= \lambda^{(1)}(i,k)(\delta_{j,l})$

ofwel
$$s_{ij;kl} = \lambda^{(1)}(i,k)\, \delta_{j,l} \quad . \qquad (1)\ a$$

Evenzo kunnen we te werk gaan bij de groep F; we construeren nu p $\times$ p matrices $S^{(j,l)}$ die met $D(F_\alpha)$ commuteren en vinden dan:

$$s_{ij;kl} = \lambda^{(2)}(j,l)\,\delta_{ik} \,. \qquad ② \text{ a}$$

Uit ① a en ② a volgt:

$$s_{ij;kl} = 0 \quad \text{als } i \neq k \text{ en } j \neq l$$

en

$$s_{ij;ij} = \lambda^{(1)}(i,i) = \lambda^{(2)}(j,j)$$

$$i=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,q.$$

Neem i vast; laat j 1,...,p doorlopen dan blijkt $\lambda^{(2)}$ dus constant, dus $s_{ij;ij}$ = constante.
We hebben nu bewezen, dat iedere matrix S, die commuteert met de representatie D(H) noodzakelijk een veelvoud van de eenheid is, waaruit volgt dat D(H) irreducibel is.

Stelling II 4.4. (zonder bewijs)
Alle irreducibele representaties van $H=F \times G$ worden gegeven door de producten van de irreducibele representaties van F en G.

Voorbeelden:
A. Beschouw de drie-dimensionale representatie (g_{ik}) van de draaigroep: de productrepresentatie van (g_{ik}) met zichzelf werkt op de $R^3 \times R^3 = R^9$.
De componenten van een element, a_{ik}, uit de R^9 transformeren onder de productrepresentatie als:

$$a'_{rs} = \sum_{i,k} g_{ri} g_{sk} a_{ik} \qquad i,k = 1,2,3.$$

Analoog wordt gedefinieerd het product van r drie-dimensionale representaties van de draaigroep. De componenten van een element uit de R^{3^r}, $a_{i_1,\ldots,i_r}$ transformeren onder de productrepresentatie als:

$$a_{i'_1,\ldots,i'_r} = \sum_{i_1\ldots i_r} g_{i'_1 i_1} \cdots g_{i'_r i_r} a_{i_1,\ldots,i_r} \,. \qquad ①$$

We noemen deze representatie van de draaigroep de tensorrepresentatie.

Immers we verstonden onder een grootheid, die gekarakteriseerd wordt door 3^r getalletjes, die onder een orthogonale transformatie zich als onder (1) transformeert, juist een tensor van de orde r in de 3-dimensionale Euclidische ruimte. We kunnen dit dus equivalent definiëren als:

Een tensor van de orde r in een 3-dimensionale Euclidische ruimte is een element van het Kronecker-product van r 3-dim. ruimtes, waarin het product van r 3-dimensionale representaties van de draaigroep werkt.

B. Zijn gegeven twee representaties $D^{(p)}$ en $D^{(q)}$ van de draaigroep en zijn $A^{(p)}$ en $A^{(q)}$ de operatoren behorend bij een infinitesimale draaiing om een as n. Zij D de product representatie, dan:

$$D(g)e_i f_k = D^{(p)}(g)e_i \; D^{(q)} f_k, \quad \left\{ e_i \right\}_{i=1}^{p} \text{ en } \left\{ f_k \right\}_{k=1}^{q} \text{ orthonormale}$$

bases in resp. $R^{(p)}$ en $R^{(q)}$.

Voorts: $D^{(p)}(g)e_i = e_i + \alpha A^{(p)} e_i + \ldots$

$$D^{(q)}(g)f_k = f_k + \alpha A^{(q)} f_k + \ldots$$

zodat:

$$D(g)e_i f_k = e_i f_k + \alpha (A^{(p)} e_i f_k + e_i A^{(q)} f_k) + \ldots$$

We zien dus:

$$Ae_i f_k = A^{(p)} e_i f_k + e_i A^{(q)} f_k \; .$$

C. Het product van twee irreducibele representaties van de draaigroep.

We hebben twee irreducibele representaties van de draaigroep met gewicht l_1 en l_2, werkend in de ruimtes resp. R_1 en R_2 van dimensie resp. $2l_1+1$ en $2l_2+1$.

De productruimte $R_1 \times R_2$ noemen we R. Kies canonische bases in R_1 en R_2:

$$e_{-l_1}, e_{-l_1+1}, \ldots\ldots, e_{l_1-1}, e_{l_1} \quad \text{in } R_1$$

$$f_{-l_2}, f_{-l_2+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots, f_{l_2-2}, f_{l_2-1}, f_{l_2}.$$

We hebben dus:

$$H_3^{(1)} e_{m_1} = m_1 e_{m_1} \qquad \text{en} \qquad H^{(1)^2} e_{m_1} = l_1(l_1+1)e_{m_1} \quad \forall m_1$$

$$H_3^{(2)} f_{m_2} = m_2 f_{m_2} \qquad\qquad H^{(2)^2} f_{m_2} = l_2(l_2+1)f_{m_2} \quad \forall m_2 \, .$$

Beschouw nu de H_3 van de productrepresentatie, waarvan de werking, op een factor i na, in voorbeeld B gegeven is:

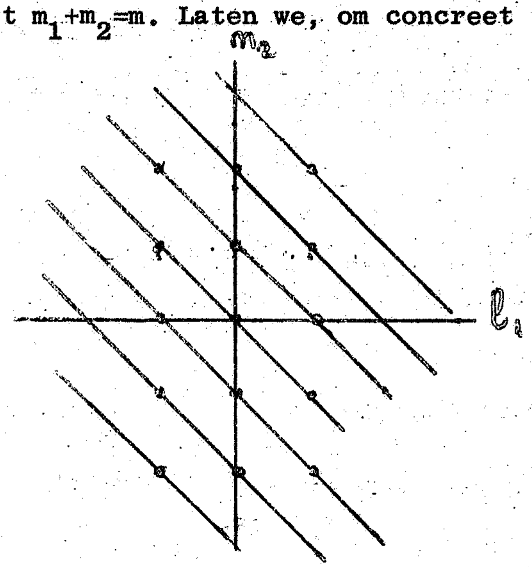
$$H_3 e_{m_1} f_{m_2} = H_3^{(1)} e_{m_1} f_{m_2} + e_{m_1} H_3^{(2)} f_{m_2}$$

$$= (m_1+m_2) e_{m_1} f_{m_2} \equiv m e_{m_1} f_{m_2} \, .$$

De eigenwaarden van H_3, m, varieren van

$$-l_1-l_2, -l_1-l_2+1, \text{ etc., tot } l_1+l_2 .$$

Wat is de multipliciteit van elke m? Het aantal eigenvectoren $e_{m_1} f_{m_1}$ met $m_1+m_2=m$. Laten we, om concreet te zijn, $l_1 \leq l_2$ nemen.



In de figuur geven de punten de vectoren $e_{m_1} f_{m_2}$ aan, de lijnen zijn bepaald door $m_1+m_2=m$, waarbij m de bovengenoemde waarden doorloopt. We zien:
De multipliciteit van de eigenwaarde m is gelijk aan die van -m, want hebben we een eigenvector $e_{m_1} f_{m_2}$ met $m_1+m_2=m$, dan is $e_{-m_1} f_{-m_2}$ eigenvector bij eigenwaarde -m, en omgekeerd. We gaan dus alleen voor positieve m tellen:

$m=l_1+l_2$: multipliciteit 1; eigenvectoren $e_{l_1} f_{l_2}$

$m=l_1+l_2-1$: " " " " 2; " " " $e_{l_1-1} f_{l_2}$ en $e_{l_1} f_{l_2-2}$

⋮

$m=l_2-l_1$: " " " " $2l_1+1$; " " " $e_{l_1} f_{l_2-2l_1}$ tot $e_{-l_1} f_{l_2}$.

Tussen $m=l_2-l_1$ en $m=l_1-l_2$ blijft de multipliciteit constant n.l. $2l_1+1$, daarna neemt ze weer af, zoals we reeds zagen: multipliciteit van m= multipliciteit van -m.

We kunnen ook $l_2 \leq l_1$ nemen en krijgen dan een analoog resultaat.

Resumerend:

De transformatie H_3 in de ruimte R_1 R_2 heeft eigenwaarden m met $m=-l_1-l_2, -l_1-l_2+2, \dots, l_1+l_2$.

De eigenwaarde l_1+l_2 heeft multipliciteit $\mu=1$; $\mu(l_1+l_2-1) = 2$; i.h.a.: $m+\mu(m)=l_1+l_2+1$; tussen $|l_1-l_2|$ en $-|l_1-l_2|$ blijft μ constant, voor $m \leq -|l_1-l_2|$ geldt $\mu(-m) = \mu(m)$.

Wat zijn de irreducibele componenten van de product-representatie? Hiertoe nemen we de methode uit II.3.7.

Punten uit een horizontale rij geven de vectoren weer die één invariante deelruimte opspannen.

De transformatie H_3 heeft één eigenvector $e_{l_1} f_{l_2}$ met $m=l_1+l_2$ 1. Volgens II.3.7. vormt het stelsel

$$e_{l_1} f_{l_2},\ H_- e_{l_1} f_{l_2}, \dots, H_-^{2l} e_{l_1} f_{l_2}$$

een orthogonale basis voor de invariante deelruimte $R^{(1)}$, waarin de irreducibele representatie van gewicht $l=l_1+l_2$ werkt.

Beschouw het orthogonale complement van $R^{(1)}$ in R: $R^{(1)\perp}$; in $R^{(1)\perp}$ komen eigenvectoren van H_3 voor met een met één verminderde multipliciteit. I.h.b. zullen we in $R^{(1)\perp}$ géén eigenvector van H_3 bij eigenwaarde $m=l_1+l_2$ aantreffen, en nog juist één met eigenwaarde l_1+l_2-1. Met behulp van deze vector en de transformatie H_- construeren we weer een invariante deelruimte $R^{(2)} \subset R^{(1)\perp}$, waarna we het procédé analoog voortzetten. Bij $m=|l_1-l_2|$ vinden we nog juist $2|l_1-l_2|$ vectoren die een invariante deelruimte opspannen, maar dan is de ruimte R ook geheel opgesplitst (zie figuur).

Conclusie: Het product van twee irreducibele representaties met gewichten l_1 en l_2 kan uniek gesplitst worden in irreducibele representaties met gewicht l_1+l_2, $l_1+l_2-1, \ldots, l_1-l_2+1$, l_1-l_2. Ieder van deze representaties komt slechts éénmaal voor in de splitsing.

De representaties van de volledige orthogonale groep

We hebben alle representaties van de draaigroep R gevonden; beschouw nu een irreducibele representatie D van de volledige orthogonale groep $O_3 = R \times \{e, I\}$, waarbij I de inversie is, d.w.z. de operator I die iedere $\vec{r}$ uit de drie-dim. reële Euclidische ruimte in $-\vec{r}$ overvoert.

Daar I met alle $h \in O_3$ commuteert moet $D(I) = \lambda E$ zijn, daar D irreducibel is. Wegens $I^2 = e$ wordt $\lambda^2 = 1$ dus: óf $D(I) = E$

óf $D(I) = -E$.

De representatie D bevat een representatie D' van de draaigroep $R \subset O_3$, die irreducibel is. Neem n.l. $D' = \{ D(g) : g \in R \}$, dan is $D' \subset D$ irreducibel want iedere $D(g) \in D'$ is ten hoogste een factor -1 verschillend van een ~~$D(h) \in D$, die irreducibel~~ is gegeven. Dus $D' \equiv D_l$ met l het gewicht van de representatie D' van de draaigroep R.

Voor heeltallige l krijgen we twee eenduidige representaties voor de O_3:

$$D_l^+ \equiv D_l \times \{E = D_l$$

$$D_l^- \equiv D_l \times \{E, -E\}.$$

Voor halftallige l krijgen we weer één twee-duidige representatie; want als l halftallig is dan:

$$D_l \times \{E\} \equiv D_l \times \{E, -E\} = D_l .$$

De product representaties van twee éénduidige representaties van gewicht l_1 resp. l_2 geven:

$$D_{l_1}^+ \times D_{l_2}^+ = D_{l_1}^- \times D_{l_2}^- = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} D_l^+$$

en

$$D_{l_1}^+ \times D_{l_2}^- = D_{l_1}^- \times D_{l_2}^+ = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} D_l^- .$$

Het product van een eenduidige met een tweeduidige representatie geeft (l_1 heeltallig, l_2 halftallig):

$$D^{\pm}_{l_1} \times D_{l_2} = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} D_l$$

dus een ontbinding in irreducibele twee-duidige representaties. Voor het product van 2 twee-duidige representaties krijgen we:

$$\text{óf: } D_{l_1} \times D_{l_2} = \sum_{l=l_1-l_2}^{l_1+l_2} D^{+}_l$$

$$\text{óf: } D_{l_1} \times D_{l_2} = \sum_{l=l_1-l_2}^{l_1+l_2} D^{-}_l$$

afhankelijk van de wijze, waarop we de 2 twee-duidige representaties met elkaar vermenigvuldigd hebben.

II.4.3. Tensoren en tensorrepresentaties

Definitie. Een tensor van de orde r in de 3-dim. Eucl. ruimte is een grootheid, gekarakteriseerd door 3^r getallen $a_{i_1 \ldots i_r}$ (i_j=1,2,3) in een bepaald assenstelsel, die bij rotatie (rotatiespiegeling) van het assenstelsel transformeren op de volgende wijze:

$$a_{i_1' \ldots i_r'} = \sum_{i_2=1}^{3} \ldots \sum_{i_r=1}^{3} g_{i_1' i_1} \ldots g_{i_r' i_r}\, a_{i_1 \ldots i_r} \qquad (1)$$

waarbij $(g_{i'i})$ gegeven is door: $e_{i'} = \sum_{i=1}^{3} g_{i'i} e_i$ dus een equivalente definitie voor een tensor wordt, als we optelling en scalarvermenigvuldiging op de natuurlijke wijze definieren:

Definitie:

Een tensor van de orde r is een element van het Kronecker-product van r 3-dim. Eucl. ruimten, dat bij een rotatie (rotatiespiegeling) transformeert onder de r^{de} Kroneckermacht van de representatie D^{-}_1 van de volledige orthogonale groep O_3.

We kunnen op grond van de voorafgaande paragrafen deze tensorruimten gaan ontbinden in invariante deelruimten.

Op grond van de - onmiddellijk uit de betreffende definities volgende - eigenschap, dat,

$$\text{als } R = R_1 + R_2$$

$$\text{dan } R \times R' = R_1 \times R' + R_2 \times R' \quad (R, R' \text{ lineaire ruimten})$$

kunnen we voor de opsplitsing van representaties analoge formules opschrijven.

We weten reeds:

$$D_1^- \times D_1^- = D_o^+ + D_1^+ + D_2^+$$

dus

$$(D_1^-)^3 = (D_1^- \times D_1^-) \times D_1^- = D_o^+ \times D_1^- + D_1^+ \times D_1^- + D_2^+ \times D_1^-$$

$$= D_o^- + 3D_1^- + 2D_2^- + D_3^-$$

gewicht v.d. representatie / orde van de tensor	l=0	l=1	l=2	l=3	l=4	l=5
r=0	1					
r=1		1				
r=2	1	1	1			
r=3	1	3	2	1		
r=4	3	6	6	3	1	
r=5	6	15	15	10	4	1

fig.1

Als $\mu(r,l)$ het aantal irreducibele representaties van orde r is, dan is als $l \neq 0$:

$$\mu(r+1,l) = \mu(r,l-1) + \mu(r,l) + \mu(r,l+1)$$

en als $l=0$

$$\mu(r+1,0) = \mu(r,1).$$

Een grootheid, gegeven door 3^r getallen die bij rotatie (rotatie-spiegeling) transformeert onder de representatie:

$$\left(D_1^{(-)^{r+1}}\right)^r$$

heet een pseudo-tensor.

Als r=0 hebben we een pseudo-scalar.

Als r=1 hebben we een pseudo-vector.

Een grootheid die transformeert onder een irreducibele representatie van gewicht l met teken $(-)^l$, $D^{(-)^l}$, noemen we een l-vector; is het teken $(-)^{l+1}$, dan spreken we van een pseudo l-vector.

Met behulp van enkele operaties op tensoren kunnen we de invariante deelruimten construeren:

I. <u>Contractie</u>: (dubbele indices houden sommatie in)

Zij $a_{i_1\ldots i_r}$ tensor van orde r, dan is

$$b_{i_3\ldots i_r} \equiv a_{iii_3\ldots i_r} = \delta_{i_1 i_2} a_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_r}$$

een tensor van orde r-2 wegens:

$$b_{i'_3\ldots i'_r} = a_{i'i'i'_3\ldots i'_r} = g_{i'i_1} g_{i'i_2} g_{i'_3 i_3} \ldots g_{i'_r i_r} a_{i_1\ldots i_r} =$$

$$= \delta_{i_1 i_2} g_{i'_3 i_3} \ldots g_{i'_r i_r} a_{i_1\ldots i_r}$$

$$= g_{i'_3 i_3} \ldots g_{i'_r i_r} b_{i_3\ldots i_r}$$

$\left\{ a_{i_1\ldots i_r} \mid a_{iii_3\ldots i_r} = 0 \right\}$ is dus invariant onder de transformatie (1) .

II. Vermenigvuldiging onder tensoren

$a_{i_1\ldots i_p}$, $b_{j_1\ldots j_q}$ zijn tensoren van orde p resp. q.

$a_{i_1\ldots i_p} b_{j_1\ldots j_q} \equiv c_{i_1\ldots i_p j_1\ldots j_q}$ geeft een systeem van 3^{p+q} getalletjes, dat als een tensor van orde p+q transformeert. Invariante deelruimten kunnen we construeren d.m.v.:

a) $\delta_{ik} \overset{\text{def}}{=} \begin{matrix} 0 \text{ als } i \neq k \\ 1 \text{ als } i = k \end{matrix}$ in ieder coördinatensysteem.

Dan is δ_{ik} een 2° orde tensor want

$$\delta_{i'k'} \overset{!}{=} g_{i'i} g_{k'k} \delta_{ik} \quad \text{wegens } g_{i'i} g_{k'k} \delta_{ik} = g_{i'i} g_{k'i} = \delta_{i'k'}$$

$\left\{ a_{i_1\ldots i_r} \mid a_{i_1\ldots i_r} = \delta_{i_1 i_2} b_{i_3\ldots i_r}, \; b_{i_3\ldots i_r} \text{ tensor orde } r-2 \right\}$ is een invariante deelruimte, want uit bovenstaande volgt dat:

$$g_{i'_1 i_1} \ldots g_{i'_r i_r} \delta_{i_1 i_2} b_{i_3\ldots i_r} \overset{!}{=} \delta_{i'_1 i'_2} b_{i'_3\ldots i'_r} \, .$$

b) We kunnen een r^{de} orde tensor splitsen in:

$$\delta_{i_1 i_2} b_{i_3 \ldots i_r} \quad \text{en} \quad c_{i_1 \ldots i_r} \quad \text{met} \quad c_{iii_3 \ldots i_r} = 0$$

hetgeen triviaal volgt uit:

$$\text{als } a_{iii_3 \ldots i_3} \equiv b_{i_3 \ldots i_r}$$

dan zij $c_{i_1 \ldots i_r} \equiv a_{i_1 \ldots i_r} - \frac{1}{3} \delta_{i_1 i_2} \; b_{i_3 \ldots i_r}$, waaruit volgt dat $c_{iii_3 \ldots i_r} = 0$.

III. Permutatie van indices

Zij s een permutatie $\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_r \\ j_1 \ldots j_r \end{pmatrix}$, dan definieren we:

$Sa_{i_1 \ldots i_r} \equiv a_{j_1 \ldots j_r}$.

S is een lineaire operatie en <u>commuteert</u> met de tensor-representatie:

$$Sa_{i'_1 \ldots i'_r} = a_{j'_1 \ldots j'_r} = g_{j'_1 j_1} \ldots g_{j'_r j_r} \; a_{j_1 \ldots j_r} = g_{i'_1 i_1} \ldots g_{i'_r i_r} \; Sa_{i_1 \ldots i_r}.$$

Invariante deelruimten uit:

$\lambda_1 S_1 + \ldots + \lambda_k S_k$ is een lin.comb. van permutatie operatoren, dan is:

$$\left\{ a_{i_1 \ldots i_r} \,\middle|\, (\lambda_1 S_1 + \ldots + \lambda_k S_k) a_{i_1 \ldots i_r} = 0 \right\}$$

een invariante deelruimte wegens de commutatieve eigenschap.

Een speciaal geval vormen de eigenwaarde vergelijkingen. Zij s een element uit de permutatie groep van r objecten, dan is er een $n \leqslant r!$ met $s^n = e$ (n is het kleinste natuurlijke getal met deze eigenschap).

Dan zijn de eigenwaarden van de corresponderende lineaire operator S : $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ ($\varepsilon_k \equiv e^{ik \frac{2\pi}{n}}$). Door voor iedere k de invariante onderruimte

$$\left\{ a_{i_1 \ldots i_r} \,\middle|\, Sa_{i_1 \ldots i_r} = \varepsilon_k a_{i_1 \ldots i_r} \right\}$$

te beschouwen, splitsen we de gehele tensorruimte op. . . .

Voorbeelden:

a) Tensoren van de orde 2: $a_{i_1 i_2}$.

M.b.v. de transpositie s=(12) splitsen we de ruimte in deelruimten van symmetrische en antisymmetrische tensoren, resp. R_s en R_{as}. R_{as} heeft dimensie 3 en transformeert volgens D_1^+, d.w.z. antisymmetrische tensoren gedragen zich als pseudovectoren. R_s heeft dimensie 6 en we kunnen ieder element hieruit schrijven als een som van een "constante" tensor $\lambda\delta_{ij}$, die zich als scalar gedraagt en een symmetrische tensor met spoor nul, die zich als 2-vector gedraagt.

We krijgen op deze wijze een opslitsing in irreducibele delen.

b) Tensoren van de orde 3:

Voor de vergelijking:

$$H^{(r)^2} a_{i_1\ldots i_r} - l(l+1) a_{i_1\ldots i_r} = 0$$

waarmee we de invariante deelruimten, behorende bij een veelvoud van de irreducibele representatie van gewicht l kunnen vinden, verkrijgt men na enig gereken:

$$\sum_{q=1}^{r} \sum_{\substack{p=1\\ p\neq q}}^{n} \Big(\delta_{i_p i_q} a_{i_1\ldots i_{q-1} t i_{q+1}\ldots i_{p-1} t i_{p+1}\ldots i_r} - a_{i_1\ldots i_{q-1} i_p i_{q+1}\ldots i_{p-1} i_q i_{p-1}\ldots i_r}\Big) + \Big\{l(l+1)-2r\Big\} a_{i_1\ldots i_r} = 0 \qquad (2)$$

(Voor de expliciete berekening zie men het artikel van Gel'fand en Shapiro A.M.S. Transl. Series 2, Vol.2, p.262).

Stel r=3; dan krijgen we uit (2) :

$$\delta_{ij} a_{ssk} + \delta_{jk} a_{iss} + \delta_{ki} a_{sjs} - a_{jik} - a_{ikj} - a_{kji} + \left[\frac{l(l+1)}{2} - 3\right] a_{ijk} = 0 \qquad (3)$$

Vorm het spoor m.b.t. ij; dan:

$$\left[\frac{l(l+1)}{2} - 1\right] a_{ssk} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{d.w.z. } a_{ssk} = 0 \text{ als } l \neq 1 \\ \text{Evenzo: } a_{iss} = a_{sjs} = 0 \text{ als } l \neq 1 \end{array}\right\} \quad (4)$$

Stel $l=0$ in (3) . Wegens (4) wordt (3) :

$$a_{ijk} = -\frac{a_{jik}+a_{ikj}+a_{jki}}{3} \quad (5)$$

Hieraan voldoen de antisymmetrische tensoren, want:

a) (5) is invariant onder cyclische permutaties (r.l. gaat in dezelfde som over): $a_{ijk} = a_{jki} = a_{kij}$

b) Verwissel i en j in (5) dan zien we op analoge wijze: $a_{jik} = a_{kji} = a_{ikj}$

c) Uit (5) zien we meteen bij verwisseling van i en j: $a_{ijk} = -a_{jik}$

De oplossingen van 5 spannen dus een invariante deelruimte van dimensie 1 op, behorende bij $l=0$. Uit:

$$\bar{D}_1 \times \bar{D}_1 \times \bar{D}_1 = \bar{D}_0 + 3\bar{D}_1 + 2\bar{D}_2 + \bar{D}_3 \quad (6)$$

lezen we dat deze antisymmetrische tensoren van de derde orde zich als pseudo-scalars onder transformatie van het assenstelsel gedragen.

Voor $l=1$ vinden we uit (3) :

$$\delta_{ij}a_{ssk} + \delta_{jk}a_{iss} + \delta_{ki}a_{sjs} - a_{jik} - a_{ikj} - a_{kji} - 2a_{ijk} = 0 \quad (7)$$

Tensoren van de vorm $\delta_{ij}x_k$, $\delta_{ik}y_j$, $\delta_{jk}z_i$ voldoen aan (7) , en deze oplossingen spannen een 9-dimensionale ruimte op, die samenvalt met de invariante deelruimte voor $l=1$, waarin een 3-voud van $\bar{D}_1$ werkt en die dus juist 9-dimensionaal moet zijn.

Voor $l=2$ geldt m.b.v. (4) :

$$a_{jik} + a_{ikj} + a_{kji} = 0 \quad (8)$$

De oplossingen van 8 moeten de invariante deelruimte, behorende bij $l=2$, opspannen, waarin 2 maal $\bar{D}_2$ werkt, dus dimensie 10 moet hebben.

Tenslotte vinden we voor $l=3$:

$$a_{ijk} = \frac{a_{jik}+a_{ikj}+a_{kji}}{3} \qquad (9)$$

de ruimte van symmetrische tensoren met alle mogelijke sporen nul, waarin een irreducibele representatie van gewicht 3 werkt en die dus 7 dimensionaal is.

Voor $l=1$ en $l=2$ kunnen we de betreffende deelruimten nog splitsen in 3 resp. 2 onderruimten. Deze splitsing is niet eenduidig meer, zoals we reeds verwachtten, en kan uitgevoerd worden met de methodes I, II of III. (Zie ook het voornoemde artikelvan Gel'fand en Shapiro, blz. 265).

II 4.4. Spinoren en spinorrepresentaties

Definitie: Een spinor is een grootheid, gegeven in ieder assenstelsel in de 3-dim. Eucl. ruimte door twee op het teken na bepaalde getalletjes $\{a^1, a^2\}$, die bij rotatie (rotatiespiegeling) van het assenstelsel transformeert als:

$$a^{1'} = \alpha\, a^1 + \beta\, a^2$$

$$a^{2'} = -\bar{\beta}\, a^1 + \bar{\alpha}\, a^2$$

waarbij: $\alpha = \pm \cos \vartheta/_2 \; e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}$

$$\beta = \mp \sin \vartheta/_2 \; e^{i\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}$$

als φ_1, ϑ en φ_2 de betreffende Eulerse hoeken van de rotatie zijn.

Korter: een spinor is een grootheid $\{a^1, a^2\}$ die transformeert onder de irreducibele representatie van gewicht $\frac{1}{2}$. We schrijven de matrices uit deze representatie als:

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

We definiëren nu: Een spinor van de orde r is een grootheid van 2^r, tot op het teken na bepaalde, getallen $a^{\lambda_1 \dots \lambda_r}$ $(\lambda_i=1,2)$, gegeven in ieder assenstelsel, die bij rotatie (rotatiespiegeling) transformeert als:

$$a^{\lambda'_1 \dots \lambda'_r} = s_{\lambda'_1\lambda_1} \dots s_{\lambda'_r\lambda_r}\, a^{\lambda_1 \dots \lambda_r} .$$

We spreken in dit geval van een contravariante spinor van orde r. We zien meteen dat de spinorrepresentatie van orde r het product is van r irreducibele representaties van gewicht $\frac{1}{2}$. De analogie met tensoren is volledig.

Symmetrische spinoren

Een spinor $a^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ heet symmetrisch, als al zijn componenten onveranderd blijven onder willekeurige permutatie van de indices $\lambda_1 \ldots \lambda_r$.

Daar λ_i slechts de waarden 1 en 2 kan aannemen, is een willekeurige component van een symmetrische spinor altijd terug te brengen op:

$$a^{\underbrace{111\ldots\ldots1}_{r}}, \text{ óf: } a^{\underbrace{11\ldots1}_{r-k},\underbrace{22\ldots2}_{k}}, \text{ of: } a^{\underbrace{22\ldots\ldots2}_{r}}$$

Kennelijk vormen de symmetrische spinoren van orde r een r+1 dimensionale deelruimte van de ruimte van alle r^{de} orde spinoren. Deze deelruimte is invariant t.o.v. de spinorrepresentatie, daar iedere permutatie operator commuteert met de spinor representatie:

$$\begin{aligned} Pa^{\lambda_1' \ldots \lambda_r'} \equiv a^{\mu_1' \ldots \mu_r'} &= s_{\mu_1' \mu_r} \ldots s_{\mu_r' \mu_r} a^{\mu_1 \ldots \mu_r} \\ &= s_{\lambda_1' \lambda_1} \ldots s_{\lambda_r' \lambda_r} Pa^{\lambda_1 \ldots \lambda_r} \end{aligned}$$

waaruit we zien dat de symmetrie van de spinor onder transformatie behouden blijft.

We gaan nu aantonen, dat de representatie in deze deelruimte irreducibel is. Stel $r \equiv 2l$ (dus l heel- of halftallig). Voldoende is te bewijzen, dat de operator $H_3^{(3)}$ in deze ruimte r+1 = 2l+1 verschillende eigenwaarden heeft, zodat dus de eigenvectoren van H_3 de gehele deelruimte der symmetrische spinoren opspannen.

$$H_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} H_3^{(r)} a^{\lambda_1 \ldots \lambda_r} &= (H_3)_{\lambda_1 \mu} a^{\mu \lambda_2 \ldots \lambda_r} + \ldots + (H_3)_{\lambda_r \mu} a^{\lambda_1 \ldots \lambda_{r-1} \mu} \\ &= \left(\frac{-p_1}{2} + \frac{p_2}{2}\right) a^{\lambda_1 \ldots \lambda_r} \end{aligned}$$

waarbij p_1 en p_2 de aantallen van resp. éénen en tweëen onder de indices λ_1 tot λ_r.
Dus een spinor, waarvan de componenten met zeker aantal (p_1^o) éénen en p_2^o tweëen ongelijk nul zijn, en alle andere componenten nul zijn, is een eigenspinor van $H_3^{(r)}$ bij eigenwaarde $\frac{1}{2}(-p_1^o+p_2^o)$.

Beschouw nu de symmetrische spinor f_m met dié componenten, die terug te voeren zijn op $a^{\overbrace{11..1}^{l-m}\ \overbrace{2...2}^{l+m}}$ gelijk aan 1, alle andere nul.

Dan is f_m eigenspinor van $H^{(r)}$ met:

$$H_3^{(r)} f_m = \tfrac{1}{2}\left\{ - (l-m) + (l+m)\right\} f_m = m\, f_m \ .$$

Daar $-l \leqslant m \leqslant l$ zijn er dus $2l+1 = r+1$ verschillende eigenwaarden. De spinoren f_m vormen, op een factor na, de elementen van de canonische basis.

We hebben dus aangetoond, dat alle irreducibele representaties van de rotatiegroep in ruimtes van symmetrische spinoren gerealiseerd worden, waarbij symmetrische spinoren van even rang de heeltallige en die van oneven rang de halftallige representaties voortbrengen.

Spinoralgebra

Het spoor van een spinor $a^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ definieren we als:

$$\mathrm{Sp}\, a^{\lambda_1 \ldots \lambda_r} \equiv b^{\lambda_3 \ldots \lambda_r} = \varepsilon_{\alpha\beta}\, a^{\alpha\beta\lambda_3 \ldots \lambda_r}$$

met $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (zie voor invoering van ε : Liubarski, Anwendungen der Gruppentheorie in der Physik § 48).

De zo verkregen grootheid is inderdaad weer een spinor want:

zij $s = (s_{ij})$ een matrix met de representatie van gewicht $\frac{1}{2}$, dan geldt:

$$s^T \varepsilon\, s = \varepsilon$$

en dus:

$$b^{\lambda'_3\ldots\lambda'_r} = \varepsilon_{\alpha\beta}\, a^{\alpha\beta\lambda'_3\ldots\lambda'_r} = \varepsilon_{\alpha\beta}\, s_{\alpha\lambda_1} s_{\beta\lambda_2} s_{\lambda'_3\lambda_3}\ldots s_{\lambda'_r\lambda_r}\, a^{\lambda_1\ldots\lambda_r}$$

$$= (s^T\varepsilon\, s)_{\lambda_1\lambda_2}\, s_{\lambda'_3\lambda_3}\ldots s_{\lambda'_r\lambda_r}\, a^{\lambda_1\ldots\lambda_r}$$

$$= \varepsilon_{\lambda_1\lambda_2}\, s_{\lambda'_3\lambda_3}\ldots s_{\lambda'_r\lambda_r}\, a^{\lambda_1\ldots\lambda_r}$$

$$= s_{\lambda'_3 3}\ldots s_{\lambda'_r r}\, b^{\lambda_3\ldots\lambda_r}$$

We voeren covariante componenten $\{b_1, b_2\}$ in door:

$$b_\lambda \equiv \varepsilon_{\lambda\alpha}\, b^\alpha \quad .$$

De covariante compoenten van een spinor transformeren volgens de toegevoegd complexe matrices $\bar{s}$:

want $\varepsilon s \varepsilon^{-1} = \bar{s}$

en dus:

$$b_{\lambda'} = \varepsilon_{\lambda'\alpha'}\, b^{\alpha''} = \varepsilon_{\lambda'\alpha'}\, s_{\alpha'\beta}\, b^\beta = \varepsilon_{\lambda'\alpha'}\, s_{\alpha'\beta}\, (\varepsilon^{-1})_{\beta\lambda}\, b_\lambda$$

$$= (\varepsilon s \varepsilon^{-1})_{\lambda'\lambda}\, a_\lambda = \bar{s}_{\lambda'\lambda}\, a_\lambda .$$

Voor spinoren van willekeurige orde:

$$b_{\lambda_1}^{\lambda_2\ldots\lambda_r} \equiv \varepsilon_{\lambda_1\alpha}\, b^{\alpha\lambda_2\ldots\lambda_r} \quad .$$

In het algemeen zal dus:

$$a^{\lambda'_1\ldots\lambda'_r}_{\sigma'_1\ldots\sigma'_p} = s_{\lambda'_1\lambda_1}\ldots s_{\lambda'_r\lambda_r}\, \bar{s}_{\sigma'_1\sigma_1}\ldots \bar{s}_{\sigma'_p\sigma_p}\, a^{\lambda_1\ldots\lambda_r}_{\sigma_1\ldots\sigma_p}$$

Ontbinding van een spinorrepresentatie in irreducibele delen

Een ruimte van spinoren van orde r kunnen we splitsen in invariante deelruimtes. Eén daarvan vonden we reeds, de r+1 dimensionale deelruimte der symmetrische spinoren, die we juist in de hoogste diagonaal aantreffen.

l \ r	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
r=1		1					
r=2	1		1				
r=3		2		1			
r=4	2		3		1		
r=5		5		4		1	
r=6	5		9		5		1
		14		14		6	

fig.2

Zij $\mu(r,l)$ het aantal irreducibele representaties van gewicht l in de spinorrepresentatie van orde r, dan:

$l \neq 0$: $\mu(r+1,l) = \mu(r,l-\frac{1}{2}) + \mu(r,l+\frac{1}{2})$

$l=0$: $\mu(r+1,0) = \mu(r,\frac{1}{2})$.

II.4.5. Ontwikkeling van vector- en tensorvelden

We hebben reeds ontwikkeld: de op de eenheidsbol kwadratisch integreerbare functies $f(\vartheta,\varphi)$ naar bolfuncties $Y_l^m(\vartheta,\varphi)$, d.w.z. scalarvelden. Deze ontwikkeling wordt vaak in bolsymmetrische problemen gebruikt.

We gaan nu vector- en tensorvelden ontwikkelen; onze werkwijze zal in grote trekken zijn: de reductie van de representatie van de draaigroep, die door rotatie van het veld wordt voortgebracht.

a. Vectorveld a(x).

We roteren het gehele veld en laten het assenstelsel in rust. Noem deze rotatie g_o.

Beschouwen we nu na deze rotatie het vectorveld in een punt x, dan treffen we daar de vector a'(x) aan, die uit de vector in het punt $g_o^{-1}x$, gevolgd door een transformatie g_o, die (per definitie) uit de 3-dimensionale irreducibele representatie stamt, ontstaan is, dus:

$$a'(x) = g_o a(g_o^{-1}x) \equiv D(g_o)\, a(x).$$

D vormt een representatie want, als g_1 een rotatie is, dan:

$$\begin{aligned} D(g_1)a'(x) &= D(g_1)\{D(g_o)a(x)\} = D(g_1)\{g_o\, a(g_o^{-1}x)\} = \\ &= g_1 g_o\, a(g_o^{-1} g_1^{-1} x) = g_1 g_o a((g_1 g_o)^{-1} x) \\ &= D(g_1 g_o) a(x). \end{aligned}$$

We nemen alleen vectoren gedefinieerd op de eenheidsbol (want punten op een bol met oorsprong als middelpunt blijven punten op die bol na rotatie g_o). Een punt P op de bol heeft coördinaten φ en ϑ, dus het vectorveld op de eenheidsbol is:

$$a = a(\vartheta,\varphi).$$

We noemende componenten in het systeem Ox, Oy, Oz; $a_x(\vartheta,\varphi)$, $a_y(\vartheta,\varphi)$ en $a_z(\vartheta,\varphi)$. We zouden iedere component afzonderlijk naar bolfuncties kunnen ontwikkelen, maar dit geeft geen makkelijk hanteerbaar resultaat: bij rotatie gaat iedere component van $a(\vartheta,\varphi)$ over in een lineaire combinatie van de drie, d.w.z. transformeert niet als een scalarfunctie.

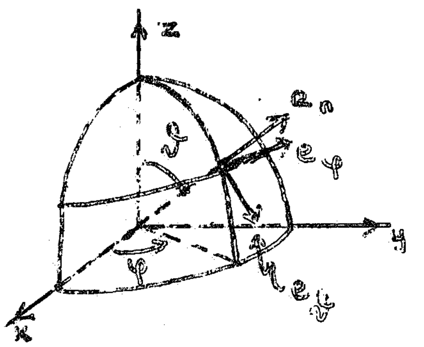
Beschouw de normaalcomponent $a_n(P)$. Deze gaat bij rotatie g_o over in de normaalcomponent in $g_o^{-1}P$:

$$D(g_o)a_n(P) = a_n(g_o^{-1}P).$$

D.w.z. de functie $a_n(P)$ transformeert als een scalarfunctie. Ons probleem is dus twee andere componenten van a(P) te zoeken (betrokken op onderling loodrechte assen, waarop de normaal eveneens loodrecht staat), die als scalarfuncties transformeren, dus onafhankelijk van elkaar.

Hiertoe gaan we de vectorfunctie, die afhankelijk is van twee variabelen ϑ en φ, transformeren in één, die van de drie Eulerse parameters φ_1, Θ en φ_2 afhankelijk is.

Neem een orthonormale triade e_1, e_2, e_3 in punt P, met e_3 in de richting van de normaal in P. Verplaatsen we deze triade evenwijdig



aan zichzelf, tot zijn oorsprong met O samenvalt, dan zien we dat hij uit de triade Ox, Oy, Oz is ontstaan door een rotatie g (Ox $\rightarrow e_1$, Oy $\rightarrow e_2$, Oz $\rightarrow e_3$).

Met iedere triade op de bol kunnen we op deze wijze een rotatie g associeren. Transformeren we deze triade met een rotatie g_o, dan ontstaat een triade waarmee we de rotatie $g_o g$ kunnen associeren.

We kunnen dus een triade vastleggen door de drie Eulerse hoeken φ_1, Θ en φ_2 van de draaiing g waarmee hij correspondeert te geven. De oorsprong van de triade, P, op de bol, met coördinaten ϑ en φ ligt eveneens door de φ_1, Θ, en φ_2 vast: in Eulerse parameters uitgedrukt wordt P door de laatste kolom van de matrix op blz.15 van deze syllabus weergegeven; na identificatie met de coördinaten in φ en ϑ uitgedrukt blijkt:

$$\vartheta = \Theta \quad \text{en} \quad \varphi = \varphi_2 - \frac{\pi}{2} . \qquad (1)$$

We zien dat P en dus de normaal in P onafhankelijk zijn van φ_1. e_1 en e_2 liggen in het raakvlak in P, en hangen wel van φ_1 af.

Neem een rotatie g' met Eulerse hoeken $\varphi_1 + \varphi'$, Θ en φ_2, waarmee dus een triade in P correspondeert, die we e_1', e_2' en e_3' noemen, en waarvoor geldt:

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 \cos\varphi' + e_2 \sin\varphi' \\ e_2' &= -e_1 \sin\varphi' + e_2 \cos\varphi' . \end{aligned} \qquad (2)$$

Door transformatie $\varphi = \pi$, $\varphi' = \varphi_1$ krijgen we dan:

$$\begin{aligned} e_1(\varphi_1+\pi,\Theta,\varphi_2) &= -e_\varphi \cos\varphi_1 + e_\vartheta \sin\varphi_1 \\ e_2(\varphi_1+\pi,\Theta,\varphi_2) &= e_\varphi \sin\varphi_1 + e_\vartheta \cos\varphi_1 \\ e_3(\varphi_1+\pi,\Theta,\varphi_2) &= e_n, \end{aligned} \qquad (3)$$

waarbij e_φ en e_ϑ eenheidsvectoren langs de raaklijn aan resp. breedtecirkel en meridiaan in de richting van toenemende hoekgrootte zijn in P met coördinaten Θ en $\varphi_2 - \frac{\pi}{2}$.

De componenten van a(P) betrokken op e_1, e_2 en e_3 zijn a_1, a_2 en a_3, en evenals de e_i afhankelijk van φ_1, Θ en φ_2, dus van g.

Met behulp van (3) zien we dan dat:

$$\begin{aligned} a_1(\varphi_1+\pi,\Theta,\varphi_2) &= -a_\varphi \cos\varphi_1 + a_\vartheta \sin\varphi_1 \\ a_2(\varphi_1+\pi,\Theta,\varphi_2) &= a_\varphi \sin\varphi_1 + a_\vartheta \cos\varphi_1 \\ a_3(\varphi_1+\pi,\Theta,\varphi_2) &= a_n \end{aligned} \qquad (4)$$

(a_φ, a_ϑ coördinaten van a(P) m.b.t. e_φ en e_ϑ)

Voer in:

$$a_+ = a_1 - ia_2$$
$$a_- = a_1 + ia_2$$

dan is:

$$a_+(\varphi_1,\Theta,\varphi_2) = (-a_\varphi - ia_\vartheta)e^{i\varphi_1}$$
$$a_-(\varphi_1,\Theta,\varphi_2) = (-a_\varphi + ia_\vartheta)e^{-i\varphi_1} \qquad 5$$

zoals we uit 4 zien.

a_φ en a_ϑ zijn alleen van φ en ϑ afhankelijk, d.w.z. van $\varphi_2 - \frac{\pi}{2}$ en Θ volgens 1 .

Hoe transformeren de coördinaten $a_i(g)$ $(i=1,2,3)$ nu onder een rotatie g_o? De triade e_1,e_2,e_3 en de vector $a(P)$ worden door dezelfde rotatie g_o getransformeerd, zodat de coördinaten $a_i(P)$ in de nieuwe triade dezelfde zijn:

$$a_i'(g_o g) = a_i(g)$$

ofwel:

$$a_i'(g) = a_i(g_o^{-1}g).$$

We zien dus dat de functies $a_1(g)$, $a_2(g)$ en $a_3(g)$ onafhankelijk van elkaar transformeren onder de rotatie g_o.

We zagen reeds in II.3., hoe we een op de rotatiegroep kwadratische integreerbare functie konden ontwikkelen naar gegeneraliseerde bolfuncties $D^1_{mn}(\varphi_1,\Theta,\varphi_2)$. Daarbij hadden we echter gebruik gemaakt van de representatie, die gegenereerd werd door vermenigvuldiging van rechts met een rotatie g_o van het argument van de functie.

De transformatie

$$\tilde{a}_k(g) = a_k(g^{-1})$$

geeft echter direct het gewenste resultaat:

$$\tilde{a}_k'(g) = a_k'(g^{-1}) = a_k(g_o^{-1}g^{-1}) = \tilde{a}_k(gg_o).$$

Deze transformatie is in feite het verwisselen van de argumenten φ_1,Θ en φ_2 in resp. $\pi-\varphi_2,\Theta$ en $\pi-\varphi_1$. De relaties 5 worden dus:

$$\tilde{a}_{+}(\varphi_1,\Theta,\varphi_2) = e^{-i\varphi_2}(a_{\varphi}+ia_{\vartheta})$$

$$\tilde{a}_{-}(\varphi_1,\Theta,\varphi_2) = e^{i\varphi_2}(a_{\varphi}-ia_{\vartheta}) \quad .$$

Voorts is P nu bepaald door de coördinaten $\frac{\pi}{2}-\varphi_1$ en Θ. We zien dus, dat $\tilde{a}_+$ alleen in de e-macht φ_2-afhankelijk is, evenals de $\tilde{a}_-$. We kunnen hen dus ontwikkelen naar gegeneraliseerde bolfuncties D^{l}_{1n} en D^{l}_{-1n} resp. De radiële component kunnen we, daar hij onafhankelijk van φ_2 is, ontwikkelen naar $D^{l}_{on} = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}\, Y^{l}_{n}(\frac{\pi}{2}-p_1,\Theta)$.

Resumerend:

Een vectorveld gedefinieerd op de eenheidsbol kunnen we ontwikkelen naar gegeneraliseerde bolfuncties. In een punt P op de bol, gegeven door φ en ϑ, beschouwen we de componenten $a_{\varphi}, a_{\vartheta}$ en a_r, resp. langs de breedtecirkel, meridiaancirkel en straat. De functies:

$$\tilde{a}_{+}(\varphi_1,\Theta,\varphi_2) = e^{-i\varphi_2}\left\{ a_{\varphi}(\varphi,\vartheta)+ia_{\vartheta}(\varphi,\vartheta)\right\}$$

$$\tilde{a}_{-}(\varphi_1,\Theta,\varphi_2) = e^{i\varphi_2}\left\{ a_{\varphi}(\varphi,\vartheta)-ia_{\vartheta}(\varphi,\vartheta)\right\}$$

$$\tilde{a}_{r}(\varphi_1,\Theta,\varphi_2) = a_r(\varphi,\vartheta)$$

met $\vartheta=\Theta$ en $\varphi=\frac{\pi}{2}-\varphi_1$ gaan we ontwikkelen naar D^{l}_{1n}, D^{l}_{-1n} en D^{l}_{on} resp., waarbij

$$D^{l}_{mn} = e^{-im\varphi_2}\, P^{l}_{mn}(\cos\Theta)\, e^{-in\varphi_1} \quad .$$

Dan delen we de gemeenschappelijke factor $e^{\pm m\varphi_2}$ in het eerste en het laatste geval weg, zodat we ontwikkelingen voor $a_{\varphi} \pm ia_{\vartheta}$ krijgen. a_r kunnen we ontwikkelen (zie ook II 3.9) naar $D^{l}_{on} = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}\, Y^{l}_{n}(\frac{\pi}{2}-\varphi,\vartheta)$.

Ontwikkeling van willekeurige grootheden

We beschouwen nu in ieder punt op de eenheidsbol een grootheid, gegeven door $2l_o+1$ getallen, die onder rotatie volgens de irreducibele representatie van gewicht l_o transformeert.

Als f de grootheid voorstelt en c_m de m^{de} component $(-l_o \leq m \leq l_o)$, dan is onder rotatie g_o:

$$c'_m = \sum_{n=-l_o}^{l_o} a_{mn}(g_o)c_n$$

ofwel:
$$f' = U(g_o)f.$$

Het veld, door f op de eenheidsbol bepaald, transformeert onder rotatie g_o als

$$D(g_o)f(x) = U(g_o)f(g_o^{-1}x).$$

Evenals bij het vectorveld is hier van een representatie van de draaigroep sprake.

Om nu een ontwikkeling te verkrijgen gaan we op volkomen analoge wijze te werk. We kiezen een punt P op de eenheidsbol, bepaald door φ en ϑ; $c_m(g)$ zijn de coördinaten van de grootheid in een basis die door rotatie g uit de oorspronkelijke is verkregen en die als oorsprong P heeft. Dan is

$$c_m(g) = \sum_{m=-l_o}^{l_o} a_{mn}(g)c_n \;.$$

Onder een rotatie g_o van het veld transformeren de $c_m(g)$ onafhankelijk van elkaar: de componenten in de nieuwe basis $c'_m(g_og)$ zijn gelijk aan de overeenkomstige in de oude basis $c_m(g)$, d.w.z.:

$$c'_m(g) = c_m(g_o^{-1}g).$$

Voer weer de functies $\tilde{c}_m(g) \equiv c_m(g^{-1})$ in zodat:

$$D(g_o)\tilde{c}_m(g) = \tilde{c}_m(gg_o).$$

Voorts is:

$$\tilde{c}_m(\varphi_1,\theta,\varphi_2) = e^{-im\varphi_2}\,\tilde{c}_m(\varphi_1,\theta,0).$$

We zien nu dat we $\tilde{c}_m$ naar D^{l}_{mn} moeten ontwikkelen: de gemeenschappelijke factor $e^{-im\varphi_2}$ kunnen we wegdelen, zodat we een ontwikkeling voor $\tilde{c}_m(\varphi_1,\theta,0)$ overhouden, waarbij φ_1 en θ op dezelfde wijze als in het voorgaande met φ en ϑ samenhangen:

$$c_m(\tfrac{\pi}{2}-\varphi,\vartheta,0) = e^{im\varphi_2} \sum_{l=m}^{\infty} \sum_{n=-l}^{l} a^l_{mn} D^l_{mn}(\varphi_1,\theta,\varphi_2)$$

$$= \sum_{l=m}^{\infty} \sum_{n=-l}^{l} a^l_{mn} P^l_{mn}(\cos\vartheta) e^{-in(\frac{\pi}{2}-\varphi)} .$$

Voor de ontwikkeling van een tensorveld zie men het artikel van Gel'fand en Shapiro.

II.4.6. Rotatie-invariante vergelijkingen

Zij $\psi_1(x_1x_2x_3),\ldots,\psi_N(x_1x_2x_3)$ een N-tal onbekende functies. We geven dit N-tal weer door

$$\psi(x_1x_2x_3).$$

Voorts is gegeven een systeem van N partiële differentiaalvergelijkingen van de eerste orde, geschreven als:

$$L_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + L_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + L_3\frac{\partial\psi}{\partial x_3} + \kappa\psi = 0 \qquad (1)$$

De L_i zijn $N \times N$ matrices en κ is een complex getal. Laat het N-tal functies onder rotatie g van het assenstelsel onder elkaar transformeren volgens de representatiematrix D(g) (niet noodzakelijk irreducibel). Dus:

$$\psi'(x_1'x_2'x_3') = D(g)\psi(x_1x_2x_3) \qquad (2)$$

waarbij D(g) een $N \times N$ matrix is, onafhankelijk van $\vec{x}$.

<u>Definitie</u>:

Het systeem vergelijkingen (1) heet invariant onder rotatie van het assenstelsel, d.w.z. een coördinatentransformatie x' = gx, als L_i (i=1,2,3) en κ dezelfde numerieke waarden hebben in de vergelijking:

$$\sum_{i=1}^{3} L_i\frac{\partial\psi'}{\partial x_i'} + \kappa\psi' = 0$$

waarbij ψ' door (2) gegeven is.

We gaan nu kriteria zoeken, opdat (1) aan de eis van invariantie voldoet.

We roteren het assenstelsel:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} g_{ij}x_j \Longrightarrow x_i = \sum_{j=1}^{3} g_{ji}x_j' \ .$$

Voorts is $\psi' = D(g)\psi \Longrightarrow \psi = D^{-1}(g)\psi'$

en
$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{3} g_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i'} \ .$$

Substitueer dit in (1) :

$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \left\{ g_{ik}L_k \frac{\partial (D^{-1}(g)\psi')}{\partial x_i'} \right\} + \kappa D^{-1}(g)\psi' = 0. \quad (3)$$

D(g) is een constante matrix, dus krijgen we, na vermenigvuldiging van links met D(g):

$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \left\{ g_{ik}D(g)L_kD^{-1}(g) \frac{\partial\psi'}{\partial x_i'} \right\} + \kappa\psi' = 0 \ . \quad (4)$$

Het invariantie kriterium wordt nu:

$$\sum_{k=1}^{3} g_{ik} \, D(g)L_kD^{-1}(g) = L_i \qquad (i=1,2,3) \quad (5)$$

Uit (5) kunnen we door een truc de volgende conclusie trekken: Neem een vector (p_1,p_2,p_3) en beschouw de matrix $\sum_{i=1}^{3} L_ip_i$.

Onder een rotatie g verandert de matrix L_i in:

$$L_i' = \sum_{k=1}^{3} g_{ik}L_k$$

dus $\sum_{i=1}^{3} L_ip_i$ gaat over in $\sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} g_{ik}L_kp_i = \sum_{k=1}^{3} L_kp_k'$

$$\text{waarbij} \quad p_k' = \sum_{i=1}^{3} g_{ik}p_i \, .$$

Met behulp van (5) zien we:

$$\sum_{i=1}^{3} L_ip_i = \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} g_{ik}p_iD(g)L_kD^{-1}(g) = \sum_{k=1}^{3} D(g)L_kp_k'D^{-1}(g)$$

$$= D(g)\left\{ \sum_{k=1}^{3} L_kp_k' \right\} D^{-1}(g) \, . \quad (6)$$

We kunnen nu de karakteristieke veelterm van het invariante systeem bepalen; uit (6) blijkt:

$$\det \sum_{i=1}^{3} L_i p_i = \det \sum_{k=1}^{3} L_k p'_k \; . \qquad (7)$$

Daar ieder tweetal vectoren met dezelfde lengte door rotatie in elkaar overgevoerd kan worden, is het karakteristieke polynoom van het invariante systeem wegens (7) slechts afhankelijk van $(p_1^2+p_2^2+p_3^2)^{\frac{1}{2}}$. Bovendien is det $(\sum_{i=1}^{3} L_i p_i)$ homogeen van de graad N in p_i, d.w.z.:

$$\det \sum_{i=1}^{3} L_i p_i = C(p_1^2+p_2^2+p_3^2)^{N/2}$$

en daar het karakteristieke polynoom zeker rationaal is in p_i, moet $\frac{N}{2}$ een geheel getal zijn.

Conclusie: Als het systeem (1) van N partiële differentiaalvergelijkingen invariant is onder rotaties moet N even zijn.

Het invariantiekriterium (5) kunnen we ook op een andere - equivalente - manier weergeven.

Beschouw de infinitesimale draaiing om de x-as:

$$g = e + a_1 \xi + \ldots$$

dan is

$$D(g) = E + A_1 \xi$$

$$\text{en} \quad D^{-1}(g) = E - A_1 \xi \; .$$

Substitueren we dit in (5) dan krijgen we, na coëfficiënten te hebben vergeleken:

$$\begin{aligned} [A_1, L_1] &= 0 \\ [A_1, L_2] &= L_3 \\ [A_1, L_3] &= -L_2 \; . \end{aligned} \qquad (8)$$

Door substitutie van $g=e+a_2\xi$ en $g=e+a_3\xi$ krijgen we analoge uitdrukkingen voor A_2 en A_3:

$$\begin{aligned} [A_2, L_1] &= -L_3, & [A_3, L_1] &= L_2 \\ [A_2, L_2] &= 0 \; , & [A_3, L_2] &= -L_1 \\ [A_2, L_3] &= L_1, & [A_3, L_3] &= 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

Het bewijs, dat uit (8) en (9) (5) volgt, is volkomen analoog met de bewijsvoering, waarmee we aantoonden, dat een representatie geheel door z'n infinitesimale operatoren A_1, A_2 en A_3 bepaald is. Dus:

$$(5) \Longleftrightarrow \begin{cases} (8) \\ (9) \end{cases}$$

Om nu L_1, L_2 en L_3 te vinden, gaan we L_2 en L_3 uit (8) en (9) elimineren, waarbij we gebruik maken van de ladder operatoren

$$H_+ = H_1 + iH_2 = iA_1 - A_2$$

$$\text{en} \quad H_- = H_1 - iH_2 = iA_1 + A_2 \quad .$$

Uit (8) en (9) volgt:

$$\left[L_3, H_-\right] = i\left[L_3, A_1\right] + \left[L_3, A_2\right] = iL_2 - L_1$$

terwijl:

$$\left[(iL_2 - L_1), H_+\right] = \left[iL_2 - L_1, iA_1 - A_2\right] = -\left[L_2, A_1\right] + \left[L_1, A_2\right]$$
$$= 2L_3$$

L_3 moet dus voldoen aan:

$$\left[L_3, H_3\right] = 0$$

$$\text{en} \quad \left[\left[L_3, H_-\right], H_+\right] = 2L_3 \qquad (10)$$

Het is mogelijk L_3 expliciet uit (10) te bepalen, en dan L_1 en L_2 m.b.v.

$$L_1 = \left[A_2, L_3\right] \text{ en } L_2 = -\left[A_1, L_3\right] \quad \text{te vinden.}$$

Men zie hiervoor het artikel van Gel'fand en Shapiro.

III. De Lorentz-groep door J. Hilgevoord

III. 1. De volle Lorentz-groep en de vier klassen van Lorentz-transformaties

De Lorentz-groep is de groep van alle reële, lineaire, homogene transformaties

$$\hat{x}_k = \sum_{l=0}^{3} g_{kl}\, x_l \tag{1.1}$$

van de coördinaten x_0, x_1, x_2, x_3, die de vorm

$$S^2(x) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \tag{1.2}$$

invariant laten.

We volgen de notatie van Gel'fand, Minlos en Shapiro, hoewel deze zeer veel verschilt van de in de fysica gebruikelijke. Daar het ons toch alleen om de mathematische eigenschappen gaat, is dit niet zo belangrijk. Echter, bij de naamgeving van de verschillende Lorentz-groepen, volgen we de in de fysica meest gebruikelijke conventie. De vertaling van onze conventie in die van Gel'fand et.al. wordt gegeven in het volgende lijstje

Wij	Gel'fand et. al.
volle Lorentz-groep	algemene Lorentz-groep
orthochrone Lorentz-groep	complete Lorentz-groep of ook Lorentz-groep
eigenlijke Lorentz-groep	geen naam
beperkte Lorentz-groep	eigenlijke Lorentz-groep.

De boven gedefinieerde groep van alle (reële) Lorentz-transformaties noemen we de volle Lorentz-groep.

Voer in de matrix

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Dan is

$$S^2(x) = \sum_{k,l=0}^{3} I_{kl}\, x_k x_l \,. \tag{1.4}$$

Invariantie van (1.4) onder de transformatie (1.1) vereist dat

$$I_{kl} = \sum_{k',l'} I_{k'l'}\, g_{k'k}\, g_{l'l} \tag{1.5}$$

of ook

(1.6)$\quad I = g^T I g$

waarin g^T de getransponeerde matrix is.
(Vergelijk dit met hoofdstuk II(3.1) voor de draaigroep; voor de draaigroep is g de eenheids-matrix).

Hieruit volgt weer, evenals voor de draaigroep, door het nemen van de determinant

(1.7)$\quad (\det g)^2 = 1 \Longrightarrow \det g = \pm 1.$

Maar nu is er nog een tweede relatie waaraan alle Lorentz-transformaties voldoen. Kies nl. in (1.5) k=l=0 en werk de som uit:

$$-1 = (g_{10})^2 + (g_{20})^2 + (g_{30})^2 - (g_{00})^2$$

(1.8)$\quad (g_{00})^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} g_{i0}^2 .$

Daar g_{kl} reëel is, betekent dit dat

(1.9)...$\quad g_{00} \geqslant 1 \quad$ of $\quad g_{00} \leqslant -1.$

Dus g_{00} neemt nooit waarden tussen 1 en -1 aan.

We kunnen dus vier klassen van Lorentz-transformaties onderscheiden, die we aanduiden door

$$L_+^{\uparrow},\ L_-^{\uparrow},\ L_+^{\downarrow},\ L_-^{\downarrow}.$$

De index $\pm$ geeft het teken van de determinant aan, het pijltje het teken van het element g_{00}.
(Pijl omhoog: $g_{00} \geqslant 1$, pijl omlaag: $g_{00} \leqslant -1$).
Om deze notatie duidelijk te maken eerst een paar woorden over de betekenis van (1.9).

Uit de definitie van Lorentz-transformatie volgt dat de oppervlakken in de 4-dimensionale ruimte

$$S^2(x) = c(\text{onstant}).$$

onder Lorentz-transformaties in zich zelf overgevoerd worden.
Deze oppervlakken zijn hyperboloïden.

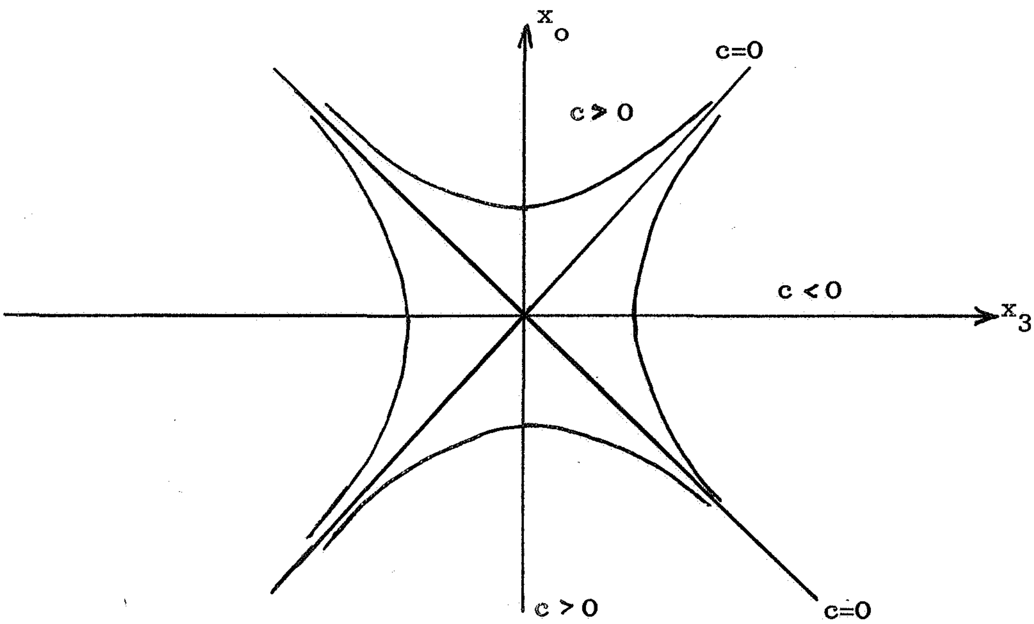
We onderscheiden de volgende vier gevallen:

$c < 0$ één-bladige hyperboloïde; x heet ruimteachtig

$c > 0$ twee-bladige hyperboloïde; x heet tijdachtig

$$c = 0 \begin{cases} 1)\ x \neq 0;\ \text{twee-bladige kegel:} \\ \qquad\qquad \text{de lichtkegel. ; } x \text{ heet lichtachtig} \\ 2)\ x = 0;\ \text{een enkel punt.} \end{cases}$$

Deze indeling is natuurlijk Lorentz-invariant.



(Doorsneden v.d. hyperboloïden met het vlak x_0, x_3.)

De hyperboloïde voor $c < 0$ is in het (x^0, x^3)-vlak ook twee-bladig maar is dit niet meer in 3 en 4 dimensies. Die voor $c > 0$ blijft echter twee-bladig, zoals direct te zien is als we zijn vergelijking schrijven als

$$x_0 = \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + |c|^2} \,.$$

Punten van het bovenblad kunnen overgevoerd worden in punten van het beneden blad door elementen van de volle Lorentz-groep. Of dit al of niet gebeurt wordt nu juist bepaald door het teken van g_{00}, en wel veranderen transformaties met $g_{00} \geq 1$ nooit het teken van x_0, terwijl transformaties met $g_{00} \leq -1$ dit teken altijd veranderen. Beschouw, om dit in te zien, de speciale vector $x = (x_0,0,0,0)$. Onder een Lorentz-transformatie gaat hij over in $\hat{x} = (\hat{x}_0,\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)$ met

$$\hat{x}_0 = g_{00}\, x_0 \ .$$

Voor deze speciale vector is het beweerde dus duidelijk. Nu kan elke vector van het bovenblad uit de speciale vector $(x_0,0,0,0,)$ verkregen worden door <u>continue</u> verandering van de componenten. Daarbij verandert de beeld vector $\hat{x}$ ook continu. Was de beeld-vector eenmaal op het beneden blad (boven blad), dan moet hij daar dus op blijven. Hiermee is het gestelde bewezen. Dus de transformaties van het type $g_{00} \geq 1$ keren de <u>richting van de tijd</u> (d.i. het teken van x_0) niet om, die van het type $g_{00} \leq -1$ doen dit wel. Dit verklaart de notatie $L^{\uparrow}$ en $L^{\downarrow}$. Beperken we ons dus tot transformaties van het type $L^{\uparrow}$, de zgn. <u>orthochrone</u> Lorentz-transformaties, dan zijn ook de beide bladen van de twee-bladige hyperboloïden apart invariant.

Van de vier klassen $L_+^{\uparrow}$, $L_-^{\uparrow}$, $L_+^{\downarrow}$, $L_-^{\downarrow}$ vormt alleen de eerste weer een groep, de <u>beperkte</u> Lorentz-groep. We zullen later zien dat het een samenhangende groep is, d.w.z. ieder paar elementen kan door een continue verandering van de parameters in elkaar overgevoerd worden. Dat de andere drie klassen géén groep vormen volgt direct uit de waarden van de determinant en de betekenis van het pijltje; het product van twee transformaties die het teken van x_0 veranderen, verandert dit teken niet etc. We zien op dezelfde manier ook direct dat $L_+^{\uparrow}$ een invariante ondergroep is, en eveneens dat de vereniging van $L_+^{\uparrow}$ met ieder van de andere drie klassen wel een groep vormt (maar geen samenhangende):

$L_+^{\uparrow} + L_+^{\downarrow} \equiv L_+$ eigenlijke Lorentz-groep

$L_+^{\uparrow} + L_-^{\uparrow} \equiv L^{\uparrow}$ orthochrone Lorentz-groep.

$L_+^{\uparrow} + L_-^{\downarrow}$ geen naam.

Merkwaardig genoeg speelt juist de groep zonder naam in de fysica op het ogenblik de hoofdrol. Om dit in te zien merken we op dat de klassen $L_-^{\uparrow}$, $L_-^{\downarrow}$ en $L_+^{\downarrow}$ de <u>spiegelingen</u> van ruimte en tijd bevatten, nl.

$L_-^\uparrow$ bevat de transformatie

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$L_-^\downarrow$ bevat

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$L_+^\downarrow$ bevat

$$PT = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Symbolisch kunnen we schrijven

$L_-^\uparrow = P.L_+^\uparrow$; $L_-^\downarrow = T.L_+^\uparrow$; $L_-^\downarrow = PT.L_+^\uparrow$.

Hiermee wordt bedoeld dat ieder element van $L_-^\uparrow$ op unieke wijze verkregen kan worden door een element van $L_+^\uparrow$ te vermenigvuldigen met P, en analoog voor de andere klassen.

Het bewijs is eenvoudig: Stel $\Lambda \in L_-^\uparrow$ en schrijf $\Lambda = P\Lambda_1$, dan is 1^o. Λ_1 uniek bepaald en gelijk aan $\Lambda_1 = P\Lambda$, daar $P^2 = 1$; 2^o. $\Lambda_1 \in L_+^\uparrow$, want Λ noch P keren het teken van de x_0 om, terwijl beide determinant -1 hebben. Evenzo voor de andere gevallen.

De spiegelingen zijn discontinue transformaties, d.w.z. niet continu verbonden met de eenheid, want het teken van de determinant en het teken van g_{00} kan niet continu veranderen.

Nu blijkt de natuur niet invariant te zijn onder de transformaties P en PT (de beroemde pariteitscrisis van 1956), maar voor zover men weet wel onder T. Dus het schijnt juist de groep $L_+^\uparrow + L_-^\downarrow$ te zijn die belangrijk is voor de natuurkunde.

We merken nog op dat de hyperboloïden niet alleen invariant zijn onder de transformaties van de volle Lorentz-groep, maar dat er ook bij elk tweetal punten x en y op dezelfde hyperboloïde een Lorentz-transformatie is die ze in elkaar overvoert (en in feite zijn er oneindig veel van zulke Lorentz-transformaties). Om dit in te zien merken we in de eerste plaats op dat ingeval $c \geqslant 0$ is, de twee bladen van de hyperboloïde met elkaar verbonden kunnen worden door de transformatie T. We mogen dus aannemen dat de twee punten niet alleen op dezelfde hyperboloïde, maar ook op hetzelfde blad liggen.

Verder kan ieder van de punten door een zuivere rotatie (d.i. een Lorentztransformatie met determinant 1 die x_0 invariant laat) in het (x_0,x_3)-vlak gebracht worden en wel zo dat $x_3 > 0$ is: $\hat{x} = R_1x$, $\hat{y} = R_2y$. Het probleem is nu gereduceerd tot het in elkaar transformeren van twee punten $\hat{x}$ en $\hat{y}$ van dezelfde tak van een hyperbool in het (x_0,x_3)-vlak door een twee-dimensionale (zgn. zuivere) Lorentz-transformatie T_3 van de coördinaten x_0 en x_3. Dit kan altijd (zie § 2). Dus $\hat{x} = T_3\hat{y}$ en $x = R_1^{-1}\, T_3R_2\, y = \Lambda y$. Hierin is Λ de gezochte Lorentz-transformatie. Behalve Λ voldoen ook alle Lorentz-transformaties van de vorm $\Lambda_1\, \Lambda\, \Lambda_2$ waarin Λ_1 en Λ_2 Lorentz-transformaties zijn die x resp. y invariant laten.

III. 2. De beperkte Lorentz-groep en zijn relatie met de twee-dimensionale unimodulaire groep

III. 2.1. De beperkte Lorentz-groep

In het voorgaande hebben we gezien dat de elementen van de volle Lorentz-groep geschreven kunnen worden als product van een element van de beperkte Lorentz-groep $L_+^\uparrow$ en een van de spiegelingen P,T of PT.

In het volgende beperken we ons tot de elementen van $L_+^\uparrow$. We onderscheiden twee speciale typen van elementen:

1) De zuivere rotaties. Dat zijn de elementen van de vorm

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & R \end{array}\right)$$

waarin R een rotatie is in de 3-dimensionale ruimte (x_1,x_2,x_3). Deze vormen een ondergroep van $L_+^\uparrow$. I.h.b. heeft een rotatie over een hoek φ om de x_3-as de vorm:

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & & & \\ \hline & \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ & \sin\varphi & \cos\varphi & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right)$$

2) <u>De zuivere Lorentz-transformaties</u>. Dit zijn de bekende Lorentz-transformaties die corresponderen met de overgang naar een bewegend assenstelsel, zonder de ruimtelijke coördinaten-assen te draaien. I.h.b. correspondeert met de overgang op een stelsel dat met snelheid v beweegt in de richting van de negatieve x_3-as, de transformatie.

$$\hat{ct} = \frac{ct + v/c\; x_3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \hat{x}_1 = x_1,$$

(2.1)

$$\hat{x}_3 = \frac{x_3 + v/c.\; ct}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \hat{x}_2 = x_2.$$

Hierin is t de tijd en c de lichtsnelheid: $x_0 = ct$. Er is nu altijd een reële χ te vinden, zodat

$$\frac{1}{1-v^2/c^2} = \mathrm{ch}\,\chi\;; \qquad\qquad \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \mathrm{sh}\,\chi\;,$$

want aan de relatie $\mathrm{ch}^2\chi - \mathrm{sh}^2\chi = 1$ is voldaan. Dan correspondeert met (2.1) de matrix

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\chi & \mathrm{sh}\,\chi & & \\ \mathrm{sh}\,\chi & \mathrm{ch}\,\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

De zuivere Lorentz-transformatie is dus een "hyperbolische" draaiing in het (x_0, x_3)-vlak over een hoek χ, waarbij

(2.2) $$\mathrm{th}\,\chi = v/c.$$

Algemeen correspondeert een zuivere Lorentz-transformatie met snelheid $\vec{v}$, met een hyperbolische draaiing in het vlak door x_0 en $\vec{v}$, over een hoek $\chi = \mathrm{arcth}\, |\vec{v}|/c$.

Een belangrijk onderscheid tussen de gewone en de hyperbolische draaiingen is dat in de laatsten de matrix elementen willekeurig groot kunnen worden: voor $v/c \rightarrow 1$ worden $|\mathrm{ch}\,\chi|$ en $|\mathrm{sh}\,\chi|$ willekeurig groot.

Dat betekent dat de Lorentz-groep geen compacte groep is, wat belangrijke consequenties heeft voor de theorie van de representaties, zoals we nog zullen zien.

We hebben het volgende theorema.

Theorema III.1

Iedere $g \in L_+^\uparrow$ kan geschreven worden als

$$g = g_1\, g_2 \quad \text{of als} \quad g = g_2'\, g_1'$$

waarin g_2 en g_2' zuivere rotaties zijn en g_1 en g_1' zuivere Lorentz-transformaties; deze ontbinding is uniek.

Bewijs: Beschouw een willekeurig punt P_o op de positieve x_o-as. Stel $gP_o = A$. Dan ligt A op het boven blad van dezelfde hyperboloïde waarop P_o ligt. In het vlak door A en de x_o-as beschouwen we de zuivere Lorentz-transformatie T_{P_oA} die P_o overvoert in A. Deze transformatie is ééndui-dig bepaald door de hyperbolische hoek χ tussen P_o en A (vergelijk de gewone draaiingen in een vlak). Definieer dan g_2 door $g = T_{P_oA}g_2$ dan voert g_2 het punt P_o in zichzelf over, en is dus een zuivere rotatie: $g_2\, P_o = T^{-1}_{P_oA}\, g\, P_o = T^{-1}_{P_oA}\, A = P_o$. Verder is $g_1 = T_{P_oA}$.

Om $g = g_2'\, g_1'$ te bewijzen beschouwen we het punt $B = g^{-1}\, P_o$ en definieren de zuivere Lorentz-transformatie T_{BP_o} in het vlak door B en de x_o-as: $T_{BP_o}\, B = P_o$. Dan is $g_1' = T_{BP_o}$ en $g_2' = g\, T^{-1}_{BP_o}$.

Tenslotte de eenduidigheid. Stel $g_1g_2 = \tilde{g}_1\tilde{g}_2$. Uit $g_1g_2\, P_o = \tilde{g}_1\tilde{g}_2P_o$ volgt $g_1P_o = \tilde{g}_1P_o$. $\tilde{g}_1$ en $\tilde{g}_1$ zijn dus zuivere Lorentz-transformaties die P_o in hetzelfde punt overvoeren. Daar ze door dit punt eenduidig bepaald worden zijn ze gelijk.

Uit dit theorema volgt onmiddellijk dat de beperkte Lorentz-groep $L_+^\uparrow$ samenhangend is, want iedere rotatie en iedere zuivere Lorentz-transformatie kan op continue wijze met de eenheid verbonden worden.

III. 2.2. Relatie van $L_+^\uparrow$ met de twee-dimensionale unimodulaire groep

De unimodulaire groep C_2 is de groep van alle twee-dimensionale complexe matrices met determinant 1. We zullen de matrices van deze groep aanduiden met A.

Deze groep is homomorph met de beperkte Lorentz groep $L_+^\uparrow$, en wel is deze homomorphie twee-waardig:

$$g \rightarrow \pm A \quad (g \in L_+^\uparrow;\ A \in C_2).$$

In deze homomorphie is bevat de vroeger gevonden homomorphie van de drie-dimensionale draaigroep met de unitaire, unimodulaire, groep SU_2, zoals we zullen zien.

Voor het bewijs beschouwen we een reële viervector x met componenten (x_0, x_1, x_2, x_3). Vorm de hermitische matrix

$$X \equiv \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Met elke reële vier-vector correspondeert op deze wijze een unieke hermitische 2 x 2 matrix en omgekeerd. Laat nu $A \in C_2$ en beschouw de transformatie

$$\hat{X} = A\, X\, A^*. \tag{2.4}$$

Hier is A^* de hermitisch toegevoegde van A. Nu is $\hat{X}$ weer hermitisch; er correspondeert dus een unieke reële vier-vector $\hat{x}$ mee volgens (2.3). A bepaalt dus een relatie tussen de vectoren x en $\hat{x}$ en wel een lineaire relatie.

Uit det A = 1 volgt det X = det $\hat{X}$, en dus via (2.3):

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = \hat{x}_0^2 - \hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2 - \hat{x}_3^2 .$$

De door A geïnduceerde transformatie is dus een Lorentz-transformatie ! Noem deze g(A). We zien direct uit (2.4) dat de matrix -A dezelfde Lorentz-transformatie induceert. We laten nu zien dat dit de enige matrix is die met dezelfde L-transformatie correspondeert als A. Daartoe overtuigen we er ons eerst van dat we met een homomorphie te doen hebben. Laat $A_1 \rightarrow g(A_1)$, $A_2 \rightarrow g(A_2)$.

Uit (2.4) zien we dat A_1, A_2 correspondeert met $X = A_1A_2X(A_1A_2)^* = A_1(A_2XA_2^*)A_1^*$, dus met eerst $g(A_2)$ dan $g(A_1)$, dus

(2.5) $$A_1A_2 \rightarrow g(A_1)\, g(A_2).$$

In het bizonder

$$A^{-1} \rightarrow g^{-1}(A).$$

We hebben dus een homomorphie tussen C_2 en een ondergroep van de volle Lorentz groep L.

Hoeveel elementen van C_2 corresponderen nu met een zelfde element van L? Daartoe is het voldoende te weten hoeveel er met de eenheid $g = 1$ corresponderen. Voor zo'n A moet gelden

$$X = AXA^* \quad \text{voor alle hermitische } X.$$

Voor $X = 1$ komt er $AA^* = 1$ of $A^* = A^{-1}$, zodat nu de conditie wordt

$$XA = AX.$$

Maar een matrix die commuteert met alle hermitische matrices is een veelvoud van de eenheid:

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Tenslotte is, wegens det $A = 1$, $\lambda = \pm 1$.
Dus slechts de matrices

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

corresponderen met $g = 1$. Stel nu dat A en B beide corresponderen met dezelfde g: $g(A) = g(B)$. Wegens de homomorphie correspondeert dan AB^{-1} met $g(A)\, g^{-1}(B) = 1$, en dus is $AB^{-1} = \pm 1$, dus $A = \pm B$.

Om nu te zien dat de ondergroep van L (de volle Lorentz-groep) waarmee C_2 homomorph is, juist de beperkte Lorentz-groep $L_+^{\uparrow}$ is, maken we gebruik van een continuiteits beschouwing die intuitief duidelijk is en die in de theorie v.d. continue groepen streng bewezen wordt. (Het is ook mogelijk een directe, "eindige" afleiding te geven, maar deze is tamelijk ingewikkeld). In de eerste plaats merken we op dat de groep C_2 samenhangend is.

Het is nl. duidelijk dat twee willekeurige 2×2 matrices met determinant $\neq 0$ altijd continu in elkaar overgevoerd kunnen worden, en bovendien altijd zo dat de determinant onderweg nergens nul wordt (de conditie $\det A = 0$ bepaalt een 6-dimensionaal oppervlak in de 8-dimensionale (reële) ruimte van alle complexe 2×2 matrices en "scheidt" deze ruimte dus niet. Dit oppervlak kan dus altijd vermeden worden). Stel dus dat de elementen A_1 en A_2 van C_2 op deze manier continu verbonden worden door $A(t)$, dan worden ze ook continu verbonden door

$\frac{A(t)}{\sqrt{\det A(t)}} = A'(t)$ en $A'(t)$ ligt geheel in C_2.

Maar als C_2 samenhangend is, dan is zijn homomorphe beeld dat ook, dus C_2 wordt afgebeeld op een samenhangende ondergroep van L. Maar de grootste samenhangende ondergroep van L was $L_+^\uparrow$, dus C_2 is homomorph met een ondergroep van $L_+^\uparrow$. Maar deze ondergroep kan ook niet kleiner zijn dan $L_+^\uparrow$ want een element van C_2 wordt bepaald door 6 onafhankelijke reële parameters (de complexe conditie $\det A = 1$ legt er twee vast) terwijl een element van $L_+^\uparrow$ eveneens door 6 parameters wordt bepaald (zie bijv. theorema III. 1; zowel zuivere rotaties als zuivere L-transformaties worden door 3 reële parameters bepaald). Dus C_2 is homomorph met $L_+^\uparrow$:

$$g \rightarrow \pm A \qquad g \in L_+^\uparrow$$

(2.6) $$A \in C_2$$

$$g(A_1)\, g(A_2) \rightarrow \pm A_1 A_2 .$$

Welke elementen van C_2 corresponderen nu met de speciale elementen van $L_+^\uparrow$, nl. de zuivere rotaties en de zuivere Lorentz-transformaties? Het antwoord is verrassend eenvoudig: Is A <u>unitair</u>, dan is $g(A)$ een rotatie en omgekeerd; is A <u>hermitisch</u>, dan is $g(A)$ een zuivere Lorentz-transformatie, en omgekeerd.

<u>Bewijs.</u> Stel A is unitair (en unimodulair), dan is $A^* = A^{-1}$, dus

$$\hat{X} = A\, X\, A^{-1}.$$

Nemen van het spoor geeft

$$\mathrm{Sp}(\hat{X}) = \mathrm{Sp}(A\, X\, A^{-1}) = \mathrm{Sp}(A^{-1} A\, X) = \mathrm{Sp}(X).$$

Maar uit (2.3) zien we dat Sp X = $2x_0$, dus

$$\hat{x}_0 = x_0,$$

dus g(A) is een rotatie.

Om het omgekeerde te bewijzen merken we op dat de unitaire unimudulatie matrices een ondergroep van C_2 vormen die SU_2 heet. Wegens de homomorphie (2.6) worden ze dus afgebeeld op een ondergroep van de rotatie-groep. Een vergelijking van het aantal onafhankelijke parameters in beide groepen (drie in beide gevallen) leert weer dat deze ondergroep niet kleiner kan zijn dan de rotatie-groep. Hiermee hebben we opnieuw het resultaat van II 3.4 gevonden: de drie-dimensionale draaigroep is homomorph met de groep SU_2 en met iedere rotatie corresponderen twee elementen $\pm U \in SU_2$.

Laat vervolgens A hermitisch zijn; det A = 1. Dan kan hij gediagonaliseerd worden door een unitaire matrix:

$$A_d = U\,A\,U^{-1}$$

en wegens det $A_d = 1$ heeft A_d de vorm

$$A_d = \begin{pmatrix} a & \\ & 1/a \end{pmatrix}; \text{ a reëel.}$$

Daar $\pm$ A met dezelfde g(A) corresponderen kunnen we a > 0 onderstellen, en $a = e^{\chi/2}$ zetten, met reële χ. Invullen in (2.4)

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_0 + \hat{x}_3 & \hat{x}_1 - i\hat{x}_2 \\ \hat{x}_1 + i\hat{x}_2 & \hat{x}_0 - \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\chi/2} & \\ & e^{-\chi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\chi/2} & \\ & e^{-\chi/2} \end{pmatrix}$$

en uitwerken levert

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= x_0 \operatorname{ch}\chi + x_3 \operatorname{sh}\chi \\ \hat{x}_1 &= x_1 \\ \hat{x}_2 &= x_2 \\ \hat{x}_3 &= x_0 \operatorname{sh}\chi + x_3 \operatorname{ch}\chi . \end{aligned}$$

Dit is, zoals we weten, een zuivere Lorentz-transformatie langs de x_3-as.

De oorspronkelijke hermitische matrix A

$$A = U^{-1} A_d U$$

correspondeert wegens de homomorphie met

$$g(A) = g(U^{-1}) g(A_d) g(U)$$

waarin zoals we zojuist gezien hebben, $g(U)$ en $g(U^{-1}) = g^{-1}(U)$ rotaties zijn. Maar een transformatie van de vorm $R T R^{-1}$, waarin R een rotatie en T een zuivere Lorentz-transformatie is, is weer een zuivere Lorentz-transformatie (nl. in een richting die t.o.v. de richting van T volgens R gedraaid is). Immers, als T een vector x overvoert in y, dan voert $R T R^{-1}$ een vector R x over in R y. Dus $R T R^{-1}$ is hetzelfde ding als T, alleen t.o.v. een ander assenstelsel in de drie-dimensionale ruimte. Is T dus een Lorentz-transformatie naar een bewegend drie-dimensionaal assenstelsel, zonder dat daarmee een draaiing van dat assenstelsel gepaard gaat, dan geldt dit voor $R T R^{-1}$ eveneens.

Hiermee is aangetoond dat als A hermitisch is, g(A) een zuivere Lorentz-transformatie is. Om het omgekeerde te bewijzen bewandelen we de weg terug (een argument als bij SU_2 gaat hier niet daar de hermitische A geen ondergroep vormen !): iedere zuivere Lorentz-transformatie kan geschreven worden als $R T_3 R^{-1}$ waarin T_3 een zuivere Lorentz-transformatie in de x_3-richting is, etc.

Het is interessant op te merken dat het theorema III.1 uit het voorgaande eenvoudig volgt door gebruik te maken van de zgn. polaire ontbinding van een matrix A: iedere $A \in C_2$ kan op eenduidige wijze geschreven worden als

$$A = H U = U^1 H^1$$

waarin H en H^1 positieve hermitische matrices zijn, U en U^1 unitaire.

typ.: ej

III. 2.3. Infinitesimale operatoren van $L_+^{\uparrow}$ en C_2

Een infinitesimale Lorentz-transformatie heeft de vorm [1)]

$$g_{ik} = \delta_{ik} - \varepsilon_{ik}$$

waarin δ_{ik} het Kronecker-symbool is en de infinitesimale matrix ε_{ik} blijkens de conditie (1.6) moet voldoen aan

$$\varepsilon^T I + I\varepsilon = 0.$$

Dit leidt tot de relaties

$$\varepsilon_{kk} = 0,\ \varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}\ (i,k = 1,2,3),\ \varepsilon_{0k} = \varepsilon_{k0}.$$

Dus de matrix ε heeft de vorm

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{01} & \varepsilon_{02} & \varepsilon_{03} \\ \varepsilon_{01} & 0 & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{02} & -\varepsilon_{12} & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{03} & \varepsilon_{31} & -\varepsilon_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Er zijn dus zes reële onafhankelijke parameters.

Als bijbehorende infinitesimale operatoren vinden we

$$K_{01} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ K_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ K_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$K_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ K_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Het min-teken heeft geen diepere betekenis.

De eerste drie corresponderen met zuivere Lorentz-transformaties in resp. de x_1-, x_2- en x_3- richting, de laatste drie met zuivere draaiingen om deze assen.

De K's voldoen aan de volgende commutatie relaties (als we definieren $K_{kl} = -K_{lk}$)

(2.8) $\left[K_{kl}, K_{mn}\right] = -I_{km} K_{ln} - I_{ln} K_{km} + I_{kn} K_{lm} + I_{lm} K_{kn}.$

Met de notatie

(2.9)
$$J_1 = i K_{23},\ J_2 = i K_{31},\ J_3 = i K_{12}$$
$$N_1 = -i K_{01},\ N_2 = -i K_{02},\ N_3 = -i K_{03}$$

volgt uit (2.8)

(2.10)
$$[J_1, J_2] = i J_3 \text{ (cycl.)} \qquad [N_1, N_2] = -i J_3 \text{ (cycl.)}$$
$$[J_1, N_2] = [N_1, J_2] = i N_3 \text{ (cycl.)}$$

alle andere zijn nul.

Voor de infinitesimale operatoren worden zeer veel verschillende keuzen en notaties gebruikt. De hier gebruikte notatie lijkt wat overzichtelijker dan die in Gel'fand et.al. Voor het gemak geven we een vergelijkende tabel.

Gel'fand et al.	Wij
A_{12}, A_{13}, A_{23}	$-K_{12}, +K_{31}, -K_{23}$
B_1, B_2, B_3	$-K_{01}, +K_{02}, -K_{03}$

Verder gebruikt Gel'fand ook de notatie

$$A_{12} = A_3,\ A_{13} = A_2,\ A_{23} = A_1 \quad (\text{ dus niet cyclisch!})$$

Vervolgens beschouwen we de infinitesimale operatoren van de unimodulaire groep C_2. Iedere 2 x 2 matrix kan geschreven worden als lineaire combinatie van de vier onafhankelijke matrices

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dus

$$A = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k \sigma_k$$

waarin α_k complexe getallen zijn.

Een infinitesimale A heeft de vorm

$$A = \sigma_0 + \sum_{k=0}^{3} \alpha_k \sigma_k$$

waarin de α_k infinitesimaal zijn. De conditie det A = 1 leidt tot

$$(1+\alpha_0)^2 - \alpha_1^{\,2} - \alpha_2^{\,2} - \alpha_3^{\,2} = 1.$$

De enige eerste orde term is het dubbele product $2\alpha_0$, dus moet $\alpha_0 = 0$ zijn. Dus

$$A = \sigma_0 + \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \sigma_k.$$

In plaats van de drie complexe parameters α_k voeren we zes reële in:

(2.11) $$A = \sigma_0 - \sum_{k=1}^{3} ia_k \cdot \tfrac{1}{2}\sigma_k + \sum_{k=1}^{3} ib_k \cdot \frac{i}{2}\sigma_k \qquad (a_k, b_k \text{ reëel})$$

De bijbehorende infinitesimale operatoren zijn dan

$$\frac{\sigma_1}{2}, \frac{\sigma_2}{2}, \frac{\sigma_3}{2}$$

(2.12) en

$$\frac{i\sigma_1}{2}, \frac{i\sigma_2}{2}, \frac{i\sigma_3}{2}.$$

Men overtuigt zich er makkelijk van dat ze dezelfde commutatie regels volgen als de operatoren (2.9) met de toevoeging

(2.13) $$\frac{\sigma_i}{2} \longrightarrow J_i, \quad \frac{i\sigma_i}{2} \longrightarrow N_i \qquad (i=1,2,3).$$

Dit toont ons de isomorphie van $L_+^{\uparrow}$ en C_2 <u>in een omgeving van de eenheid</u>; dat we in feite met een twee-waardige homomorphie te doen hebben kunnen we hieruit natuurlijk niet zien.

III. 3. De representaties van de Lorentz-groep $L_+^{\uparrow}$

III. 3.1. Oneindig-dimensionale representaties

Een voor de representatie theorie belangrijk verschil tussen de draaiingsgroep en de Lorentzgroep is dat de eerste compact is, de laatste niet (zie blz. 88), d.w.z. niet iedere continue functie over de groep is begrensd.

Van een compacte groep zijn alle irreducibele representaties eindig dimensionaal en equivalent met unitaire representaties. Deze eigenschap berust op het bestaan van een onder de groepsoperaties invariante integraal voor elke continue functie over een compacte groep. Voor de Lorentzgroep bestaat zo'n integraal niet, en beide genoemde eigenschappen blijken hier niet vervuld te zijn: er zijn oneindig-dimensionale irreducibele representaties (waaronder unitaire) en geen van de eindig-dimensionale irreducibele representaties is equivalent met een unitaire.

Aangezien oneindig-dimensionale representaties kunnen optreden zullen we een aantal begrippen opnieuw moeten definieren.

Definitie van representatie

Laat R een ruimte zijn waarin een norm gedefinieerd is. Laat aan elk element g van de groep G een begrensde lineaire operator T_g in R zijn toegevoegd, dan heet deze toevoeging een lineaire representatie van de groep G in de ruimte R, als voldaan is aan:

1) $T_e = E$ (e is de eenheid in G, E de eenheids operator in R)

2) $T_{g_1 g_2} = T_{g_1} \cdot T_{g_2}$

3) de afbeelding is continu: voor iedere begrensde lineaire functionaal F op R en voor ieder vast element ξ van R, hangt $F(T_g\xi)$ continu van g af.

De representatie heet eindig als de ruimte R eindig is.
De representatie heet unitair als R een Hilbert ruimte is, terwijl het scalaire product (ξ,η) invariant is onder de operatoren T_g:

$$(T_g\xi, T_g\eta) = (\xi,\eta).$$

Een representatie heet irreducibel als

1) R geen gesloten, onder alle operatoren T_g invariante onder-ruimten heeft.

2) elke begrensde operator A die met alle T_g commuteert een veelvoud van de eenheids-operator is.

Voor eindig dimensionale representaties zijn 1) en 2) equivalent (lemma van Schur); in het oneindig dimensionale geval is dit niet altijd zo.

Twee representaties $T_g^{(1)}$ en $T_g^{(2)}$ in $R^{(1)}$ resp. $R^{(2)}$ heten equivalent, als deze ruimten een overal dichte lineaire deelruimte $L^{(1)}$ resp. $L^{(2)}$ bevatten die invariant is onder $T_g^{(1)}$ resp. $T_g^{(2)}$, terwijl er een gesloten operator B bestaat die $L^{(1)}$ en $L^{(2)}$ een-eenduidig op elkaar afbeeldt en waarvoor geldt

$$T_g^{(1)}\ B = B\ T_g^{(2)}.$$

Deze definitie komt er op neer dat er in $R^{(1)}$ en $R^{(2)}$ bases bestaan waarop de operatoren $T_g^{(1)}$ en $T_g^{(2)}$ voorgesteld worden door dezelfde matrix.

III. 3.2. De relatie tussen de representaties van $L_+^{\uparrow}$ en van C_2

Uit de homomorphie (2.6)

$$g(A) \rightarrow \pm A$$

volgt dat iedere representatie van $L_+^{\uparrow}$ een representatie van C_2 is. Namelijk $g(A) \rightarrow T_{g(A)}$ dan $\pm A \rightarrow T_{g(A)}$. Het omgekeerde geldt alleen voor die representaties van C_2 waarvoor geldt $T_A = T_{-A}$ voor alle A. Is dit niet het geval dan worden aan elke g(A) twee verschillende operatoren T_A en T_{-A} toegevoegd zoals we zullen zien. We noemen dit een twee-waardige representatie. Merk op dat de getrouwe representaties van C_2 tot zulke twee-waardige representaties van $L_+^{\uparrow}$ leiden. We bewijzen nu: is de representatie van C_2 irreducibel dan is $T_A = \pm T_{-A}$, en door de hele representatie geldt hetzelfde teken. Immers de matrix

$$-E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

is een element van C_2 dus $T_A = T_{-E}\ T_{-A}$.

Maar $-E$ commuteert met alle A, dus T_{-E} commuteert met alle T_A en daar de representatie irreducibel was is T_{-E} een veelvoud van de eenheid (Schur). Tenslotte is $(T_{-E})^2 = T_E$ dus $T_{-E} = \pm T_E$. Dus in een irreducibele twee-waardige representatie van $L_+^{\uparrow}$ zijn dan ieder element twee operatoren toegevoegd die steeds in teken verschillen. In het bizonder geldt dit voor de ondergroep der rotaties, en dus is de representatie van $L_+^{\uparrow}$ één -resp. twee- waardig, dan en slechts dan, als de er in bevatte representatie van de draaigroep één -resp. twee- waardig is.

Opmerkingen.

1. Men kan zich afvragen of uit een twee-waardige representatie een één-waardige verkregen kan worden door in de toevoeging $g(A) \rightarrow \pm T_A$ steeds maar één van de twee operatoren te kiezen. Dit kan echter niet op continue wijze ! Om dit te zien beperken we ons tot de draaigroep. Een nadere beschouwing van de homomorphie $g(A) \rightarrow \pm A$ leert dat als we beginnen met $A=E$ toe te voegen aan $g=e$ en we veranderen g continu tot een draaiing over 2π om een zekere as (zodat we weer in $g=e$ terug zijn) daarbij ook A continu veranderend, dat we dan terecht komen in $A=-E$. Draaien we over 4π dan eindigen we weer met $A=E$, enz. Hetzelfde zal zich voordoen in iedere continue representatie. We kunnen in principe ook meer-waardige representaties van discrete groepen beschouwen. Zulke representaties zijn echter altijd te splitsen in een-waardige wegens het ontbreken van continuïteits condities.
2. Het optreden van twee-waardige representaties hangt samen met de topologie van de groepsruimte. We zagen dat deze voor de draaigroep en voor de Lorentz-groep samenhangend is. Deze samenhang blijkt echter niet enkelvoudig te zijn, maar twee-voudig. D.w.z. we kunnen in de groepsruimte een gesloten kromme doorlopen die niet samentrekbaar is tot een punt. (Dat de Lorentz-groep twee-voudig samenhangend is, is uitsluitend een gevolg van het feit dat de draaigroep er als ondergroep in bevat is). De groepen $SU(2)$ en C_2 zijn daarentegen enkelvoudig samenhangend (op pag. 20 zagen we dat de groepsruimte van $SU(2)$ de topologie heeft van het oppervlak van een vier-dimensionale bol).

Men bewijst in de theorie van de topologische groepen, dat een enkelvoudig samenhangende groep slechts één-waardige representaties heeft. Hierin ligt de betekenis van de groepen SU(2) en C_2 voor de studie van de representaties van de draaigroep en de Lorentz-groep. De groepen SU(2) resp. C_2 heten <u>overdekkingsgroep</u> van de draaigroep resp. de Lorentz-groep.

3. Het feit dat ook de twee-waardige representaties van $L_+^\uparrow$ in de fysica een belangrijke rol spelen hangt nauw samen met de interpretatie van het formalisme van de quantummechanica. De toestanden van het fysische systeem corresponderen hierin met de vectoren van een Hilbert-ruimte; de meetresultaten aan het systeem, met het <u>kwadraat</u> van scalaire produkten van vectoren. Daarom is er fysisch geen verschil tussen een vector ψ en $-\psi$ en het is dus geen bezwaar dat in een twee-waardige representatie een draaiing over 2π een toestand ψ in $-\psi$ overvoert, daar dit tekenverschil in geen enkele <u>meting</u> tot uiting komt.

III. 3.3. De eindig-dimensionale irreducibele representaties van $L_+^\uparrow$.

De homomorphie van $L_+^\uparrow$ met C_2 reduceert het representatie probleem tot het vinden van de irreducibele representaties van C_2.

Weyl heeft bewezen dat alle eindig-dimensionale irreducibele representaties van C_2 gegeven worden door de symmetrische spinoren, net als voor de groep SU(2)(zie II. 4.4), met alleen dit verschil dat de complex geconjugeerde matrices $\bar{A}$ nu een representatie vormen die niet equivalent is met de oorspronkelijke representatie A. Er zijn dus twee niet-equivalente twee-dimensionale representaties van C_2. Bij SU(2) was er maar één. [Naast $U \to U$ zijn ook $U \to \bar{U}$ en $U \to U^{-1T}$ representaties. Bij SU(2) zijn deze drie echter equivalent (de equivalentie van de laatste twee is een gevolg van de univariteit). Bij C_2 is $A \to A^{-1T}$ equivalent met $A \to A$, maar niet met $A \to \bar{A}$. Dit alles is heel makkelijk te zien aan de infinitesimale elementen, rekening houdende met de relatie $- \sigma_k^T =$ $= - \bar{\sigma}_k = \sigma_2^{-1} \sigma_k \sigma_2$]. Aangezien we in het volgende de representaties willen vinden m.b.v. de infinitesimale methode, zullen we het resultaat van Weyl alleen maar kort resumeren.

We onderscheiden twee soorten twee-dimensionale spinoren, namelijk spinoren die volgens A transformeren en spinoren die volgens $\bar{A}$ transformeren. Zij (u_1, u_2) een basis in de ruimte der spinoren van de eerste soort, $(u_{\dot{1}}, u_{\dot{2}})$ in die der spinoren van de tweede soort. Onder

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

transformeren deze bases zich dan als

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \alpha u_1 + \gamma u_2 \\ \hat{u}_2 &= \beta u_1 + \delta u_2 \end{aligned} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned} \hat{u}_{\dot{1}} &= \bar{\alpha} u_{\dot{1}} + \bar{\gamma} u_{\dot{2}} \\ \hat{u}_{\dot{2}} &= \bar{\beta} u_{\dot{1}} + \bar{\delta} u_{\dot{2}} \end{aligned} .$$

Dit zijn representatie ruimten voor de twee-dimensionale representaties A en $\bar{A}$ van C_2.

Beschouw nu de ruimte met basis vectoren

$$(3.1) \qquad \frac{u_1^{j+m}\, u_2^{j-m} \cdot u_{\dot{1}}^{j'+m'}\, u_{\dot{2}}^{j'-m'}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j'+m')!(j'-m')!}}$$

waarin $j, j' = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ en

$m = j, j-1, \ldots, -j;\ m' = j', j'-1, \ldots, -j'$.

Dit is dan duidelijk een representatie ruimte voor C_2. Men kan bewijzen dat al deze representaties irreducibel zijn en dat alle irreducibele representaties op deze manier verkregen worden. De dimensie is $(2j+1)(2j'+1)$. De representatie wordt gekarakteriseerd door twee heel- of halftallige getallen (j,j'). De representatie A zelf is $(\frac{1}{2},0)$; de complex toegevoegde representatie is $(0,\frac{1}{2})$. De representatie $L_+^{\uparrow}$ is $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Infinitesimale methode

Dit resultaat willen we terug vinden met de infinitesimale methode. We beginnen met een aantal opmerkingen. In het volgende beschouwen we uitsluitend groepen van (eindige of oneindige) matrices. De infinitesimale operatoren zijn dus ook matrices, die aan zekere commutatieregels voldoen. Men bewijst in de theorie van de Lie-groepen, dat de infinitesimale operatoren de groep geheel bepalen.

Stel we hebben een representatie van de groep, dan levert dit natuurlijk ook een representatie van de infinitesimale operatoren, en de betreffende matrices zullen aan dezelfde commutatie relaties voldoen als de oorspronkelijke infinitesimale operatoren. (Dit volgt uit de correspondentie tussen de vermenigvuldiging in beide groepen). Bij een reducibele representatie zal ook de representatie van de infinitesimale operatoren reducibel zijn en omgekeerd. Is hiermee het probleem van de irreducibele representaties van de groep gereduceerd tot het vinden van alle irreducibele representaties van de infinitesimale operatoren? (Representatie betekent in dit verband dat de representerende matrices aan dezelfde commutatie relaties voldoen als de oorspronkelijke). M.a.w. correspondeert ook elke representatie van de infinitesimale operatoren met een representatie van de groep? In ons geval is het antwoord tamelijk eenvoudig: elke irreducibele representatie van de infinitesimale operatoren leidt tot een irreducibele representatie van de overdekkingsgroep C_2, (en dus tot een één- of twee-waardige irreducibele representatie van $L_+^\uparrow$).

Representaties van de infinitesimale operatoren zijn in het algemeen homomorphismen. Men bewijst dat zulk een homomorphisme van de infinitesimale operatoren aanleiding geeft tot een lokaal homomorphisme van de groepen zelf (lokaal = in een omgeving van de eenheid). Zulk een lokaal homomorphisme is niet altijd uit te breiden tot een homomorphisme over de hele groep (hetzelfde geldt voor een lokaal isomorphisme). Is echter een van beide groepen enkelvoudig samenhangend dan geeft een lokaal homomorphisme ook aanleiding tot homomorphie in het groot (Chevalley; Theory of Lie groups I, § VI, theorem 2; en dit colloquium hoofdstuk IV). Aangezien de groep C_2 enkelvoudig samenhangend is leidt iedere representatie van zijn infinitesimale operatoren dus tot een representatie van de groep als geheel, en daarmee tot een (een- of twee-waardige) representatie van $L_+^\uparrow$.

We merken nog op dat in het geval van de Lorentz-groep alle representaties van de infinitesimale operatoren (uitgezonderd die welke correspondeert met de identieke representatie van $L_+^\uparrow$) isomorphismen zijn.

Dit is te zien aan de explicite vorm (3,6), (3,7), maar is ook af te leiden uit de vorm van de verwisselingsrelaties (2,10). Dus alle representaties van $L_+^\uparrow$ zijn lokaal isomorph. Volgens een stelling Pontrjagin; Topological groups Ch. VIII) is er onder alle lokaal isomorphe samenhangende groepen, een en slechts een (op isomorphie na) die enkelvoudig samenhangend is, en alle andere zijn homomorph beeld van deze. Deze groep heet universele overdekkingsgroep; in ons geval is dat de groep C_2.

Constructie van de eindige irreducibele representaties met de infinitesimale methode

In plaats van de operatoren (2.9) voeren we de volgende combinaties in

(3.2) $$A_k = \tfrac{1}{2}(J_k - iN_k) \;, \quad B_k = \tfrac{1}{2}(J_k + iN_k),$$

dan vinden we

(3.3) $$\begin{aligned} &[A_1,A_2] = iA_3 \text{ (cycl)}, \; [B_1,B_2] = iB_3 \text{ (cycl)} \\ &[A_j,B_k] = 0 \quad \text{(alle } j,k = 1,2,3). \end{aligned}$$

Nu is duidelijk dat elke irreducibele representatie van de infinitesimale operatoren K_{kl}, leidt tot een irreducibele representatie van de A_k,B_k en omgekeerd ! Het vinden van alle eindig-dimensionale irreducibele representaties van A_k,B_k is echter zeer eenvoudig daar ze

1) ieder dezelfde commutatie regels hebben als de infinitesimale operatoren van de drie-dimensionale draaigroep (waarvoor het probleem in II 3.6 is opgelost)

2) onderling commuteren.

Stel nl. een dergelijke eindig-dimensionale irreducibele representatie in een ruimte R gegeven. De matrices die hierin A_k, B_k representeren, duiden we eveneens aan met deze letters. Zij dan j de grootste eigenwaarde van de matrix A_3. (Uit II 3.6 volgt $j = 0,\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2}$, ...). Deze eigenwaarde zal in het algemeen s-voudig ontaard zijn, zodat we s onafhankelijk eigenvectoren $v^{(1)}\ldots v^{(s)}$ van A_3 in R kunnen vinden.

Daar alle B_k met A_3 commuteren, zullen deze vectoren door de B_k in elkaar getransformeerd worden: ze spannen een representatie ruimte voor de B_k op. Maar deze representatie der B_k is noodzakelijk irreducibel daar A_2 en A_1 deze vectoren ook niet mengen, zodat reducibiliteit t.o.v. de B_k impliceert reducibiliteit t.o.v. alle A_k, B_k, in strijd met het ondersteIde. Deze representatie wordt gekarakteriseerd door de hoogste eigenwaarde van B_3: $j' = 0, 1, \frac{1}{2}, \ldots$. We kunnen uit de eigenvectoren $v_j^{(1)} \ldots v_j^{(s)}$ door lineaire combinatie de $s = 2j' + 1$ eigenvectoren van B_3 vormen; deze duiden we aan met $v_{jm'}$, $(-j' \leq m' \leq j')$. Tenslotte zullen de operatoren A_1 en A_2, werkend op ieder der vectoren $v_{jm'}$, daaruit bij vaste m', een rij van $2j + 1$ onafhankelijke vectoren opleveren:

(3.4) $\qquad v_{mm'}$; $(-j \leq m \leq j;\ -j' \leq m' \leq j')$.

Hiermee is een volledig stel onafhankelijke vectoren in R verkregen. Dat het er niet minder kunnen zijn is uit de boven gegeven constructie duidelijk; dat het er niet meer zijn volgt uit de eis van irreducibiliteit. Hiermee zijn alle eindige irreducibele representaties gevonden. Ze worden gekarakteriseerd door twee getallen (j, j'); $j, j' = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$, de dimensie is $(2j + 1)(2j' + 1)$. Is $(j + j')$ halftallig dan is de representatie twee-waardig, anders een-waardig. In de volgende paragraaf zullen de representaties (3.1) en (3.4) in een aantal eenvoudige gevallen met elkaar vergeleken worden.

Opmerking. Uit het boven gevondene volgt niet dat de groep $L_+^\uparrow$ isomorph is met het directe product $O_3 \times O_3$ (O_3 = drie-dimensionale draaigroep). Een infinitesimale Lorentz-transformatie is immers

$$g = 1 - i \sum_{k=1}^{3} \xi_k J_k + i \sum_{k=1}^{3} \xi_{0k} N_k$$

$$= 1 - i \sum_{k=1}^{3} (\xi_k - i\xi_{0k}) A_k - i \sum_{k=1}^{3} (\xi_k + i\xi_{0k}) B_k .$$

De A_k en B_k zijn weliswaar de infinitesimale operatoren van O_3, maar de parameters waarmee ze voorkomen zijn toegevoegd complex, terwijl ze in O_3 met reëele parameters vermenigvuldigd worden.

III 3.4. Eindig-en oneindig dimensionale irreducibele representaties van $L_+^{\uparrow}$.

Bij de constructie van de vorige paragraaf gingen we uit van het eindig zijn van de irreducibele representatie. Om alle irreducibele representaties, eindige en oneindige, te vinden moeten we uitgaan van andere combinaties van de infinitesimale operatoren, nl.

$$\begin{aligned} &H_+=J_1+iJ_2 \quad ; \quad F_+=-(N_1+iN_2)\\ &H_-=J_1-iJ_2 \quad ; \quad F_-=-(N_1-iN_2)\\ &H_3=-J_3 \qquad ; \quad F_3=-N_3 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Deze drietallen commuteren onderling niet. We vinden

$$[H_+,H_3]=-H_+ \quad ; \quad [H_-,H_3]=H_- \quad ; \quad [H_+,H_-]=2H_3.$$
$$[F_+,F_3]=H_+ \quad ; \quad [F_-,F_3]=-H_- \quad ; \quad [F_+,F_-]=-2H_3$$
$$[H_+,F_3]=[F_+,H_3]=-F_+$$
$$[H_-,F_3]=[F_-,H_3]=F_-$$
$$[H_+,F_-]=-[H_-,F_+]=2F_3$$

alle andere zijn nul.

De operatoren H zijn (evenals de operatoren J) de infinitesimale operatoren van de draaigroep die bevat is in $L_+^{\uparrow}$. Iedere irreducibele representatie van $L_+^{\uparrow}$ bevat klaarblijkelijk een representatie van de draaigroep, die echter niet irreducibel hoeft te zijn. Deze representatie van de draaigroep kan altijd ontbonden worden in een eindige of oneindige som van irreducibele representaties, gekarakteriseerd door het getal $l=0,\frac{1}{2},1,\ldots$ Men kan bewijzen dat als de representatie van $L_+^{\uparrow}$ irreducibel is, geen enkele l-waarde in deze rij meer dan één maal voorkomt [1)]. We kunnen de bijbehorende (onder de draaigroep) invariante onderruimten R_l dus nummeren met l. In iedere R_l kiezen we een kanonische basis ξ_{lm}, d.w.z. een basis bestaande uit eigenvectoren van H_3. Al deze bases tezamen vormen een (kanonische) basis in de hele R. De operatoren H hebben hierin de bekende vorm (vgl. II(3.33))

[1)] Dit volgt in feite uit de nu volgende constructie.

$$(3.6)\quad \begin{cases} H_3\,\xi_{lm} = m\,\xi_{lm} \\ H_-\,\xi_{lm} = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\;\xi_{l,m-1} \\ H_+\,\xi_{lm} = \sqrt{(l+m+1)(l-m)}\;\xi_{l,m+1} \end{cases}$$

$(m=l,\ l-1,\dots,-l)$.

Hoe werken nu de operatoren F op deze basis vectoren? Uit de commutatie regels van de F'^{s} met de H'^{s} kan men afleiden dat een F, werkend op een vector ξ_{lm}, deze transformeert in een lineaire combinatie van vectoren $\xi_{l'm'}$, waarbij l' en m' hoogstens 1 verschillen van de oorspronkelijke. Het probleem is hetzelfde als dat op pag. 80. We geven hier direct het resultaat

$$(3.7)\quad \begin{aligned} F_3\,\xi_{lm} &= C_l\sqrt{l^2-m^2}\;\xi_{l-1,m} - A_l m\,\xi_{lm} - C_{l+1}\sqrt{(l+1)^2-m^2}\;\xi_{l+1,m} \\ F_+\,\xi_{lm} &= C_l\sqrt{(l-m)(l-m-1)}\;\xi_{l-1,m+1} - A_l\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\;\xi_{l,m+1} + \\ &\quad + C_{l+1}\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)}\;\xi_{l+1,m+1} \\ F_-\,\xi_{lm} &= -C_l\sqrt{(l+m)(l+m-1)}\;\xi_{l-1,m-1} - A_l\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\;\xi_{l,m-1} + \\ &\quad - C_{l+1}\sqrt{(l-m+1)(l-m+2)}\;\xi_{l+1,m-1}\,. \end{aligned}$$

De constanten A_l, C_l kunnen tenslotte bepaald worden uit de commutatie regels van de F onderling. Ook hier zullen we direct het antwoord geven:

$$(3.8)\qquad A_l = \frac{i l_o l_1}{l(l+1)}\,,\qquad C_l = \frac{i}{l}\sqrt{\frac{(l^2-l_o^2)(l^2-l_1^2)}{4l^2-1}}$$

Hierin is $l_o = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \dots$ en l_1 willekeurig complex. Het laagste gewicht van de irreducibele representaties van de draaigroep die in deze representatie voorkomen is $|l_o|$, en $l = |l_o|, |l_o|+1, \dots$.
Het getal C_l is niet geheel bepaald door de wortel, maar we kunnen de basis vectoren altijd met een fase-factor zo vermenigvuldigen dat $|\arg C_l| \leq \pi/2$. De waarde $l=0$ treedt alleen op als $l_o=0$; dan zijn A_l en

C_l onbepaald, maar de er bij horende wortel factor in (3.7) is dan nul.

Dat we door deze constructie een (al of niet eindige) representatie van de operatoren $H_{\pm}, H_3$ en $F_{\pm}, F_3$ hebben gekregen is duidelijk, en deze representatie wordt blijkbaar geheel bepaald door twee getallen: l_o en l_1. Deze representatie is echter ook irreducibel. Beschouw de onderruimte met het laagste gewicht $R_{|l_o|}$. Deze zal i.h.a. niet invariant zijn onder de operaties F; deze leveren vectoren met gewicht $|l_o|+1$. Wegens (3.6) treedt dan de hele onderruimte $R_{|l_o|+1}$ op. Ook deze zal i.h.a. niet invariant zijn onder de operatoren F zodat ook de onderruimte $R_{|l_o|+2}$ optreedt, etc. Dit proces eindigt dan en slechts dan als voor zekere l de coëfficiënt C_{l+1} nul wordt: de basis-vectoren $\xi_{l,m}$ worden dan door de operatoren $F_{\pm}$, F_3 uitsluitend getransformeerd in basis-vectoren met gewicht $\leq l$. De verkregen representatie is dan eindig. In het andere geval gaat het proces steeds door en we krijgen een oneindige representatie. In beide gevallen is de representatie irreducibel. Immers, een representatie moet altijd een heel aantal onderruimten R_l bevatten (wegens (3,6)), eventueel oneindig veel; de bovenstaande constructie leert ons juist welke R_l in een bepaald geval noodzakelijk moeten optreden. Ook volgt er uit dat in een irreducibele representatie een bepaalde R_l hoogstens eenmaal optreedt.

Wanneer is de representatie nu eindig, d.w.z. wanneer is $C_l=0$? Uit (3.8) zien we dat dit geval zich slechts voordoet als $|l_1|>|l_o|$ en l_1 heel- of halftallig is tegelijk met l_o. De hoogste voorkomende waarde van l is dan $|l_1|-1$, en alle waarden $|l_o|$, $|l_o|+1, \ldots, |l_1|-1$ treden precies eenmaal op. In alle andere gevallen is de representatie oneindig en irreducibel.

Merk op dat de formules (3,8) niet veranderen onder de substitutie

$$(l_o, l_1) \rightarrow (-l_o, -l_1).$$

Beide paren leiden tot precies dezelfde representatie.

Enkele voorbeelden

Alvorens verder te gaan bestuderen we eerst een aantal voorbeelden , om de formules beter te leren kennen.

We hebben drie verschillende vormen voor de eindig dimensionale representaties van $L_+^{\uparrow}$ gevonden, nl. (3,1), (3,2) en (3,4), (3.6).en (3.7). We willen deze voor de eenvoudigste gevallen vergelijken. Daartoe schrijven we eerst de vorm van een infinitesimale Lorentz-transformatie.op. uitgedrukt in de verschillende stellen van infinitesimale operatoren, maar met dezelfde parameters:

$$(3.9)\qquad g = 1 - i\sum_1^3 \varepsilon_k J_k + i\sum_1^3 \varepsilon_{ok} N_k$$

$$(3.10)\qquad = 1 - i\sum(\varepsilon_k - i\varepsilon_{ok})A_k - i\sum(\varepsilon_k + i\varepsilon_{ok})B_k$$

$$(3.11)\qquad = 1 - i\,\tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - i\varepsilon_2)H_+ - i\tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)H_- - i\varepsilon_3 H_3 +$$
$$-i\,\tfrac{1}{2}(\varepsilon_{o1} - i\varepsilon_{o2})F_+ - i\tfrac{1}{2}(\varepsilon_{o1} + i\varepsilon_{o2})F_- - i\varepsilon_{o3}F_3.$$

De corresponderende infinitesimale unimodulaire transformatie is volgens (2.11) en (2.13):

$$(3.12)\qquad A = 1 - i\sum_1^3 \varepsilon_k\, \tfrac{1}{2}\sigma_k + i\sum_1^3 \varepsilon_{ok}\, \frac{i\sigma_k}{2}\ .$$

Beschouw eerst de representatie (3,1) voor $j=\frac{1}{2}$, $j'=0$; noatatie: $(\frac{1}{2},0)$. De basis (3,1) is dan twee-dimensionaal en bevat de vectoren u_1 en u_2. De representatie $(\frac{1}{2},0)$ is dus C_2 zelf; infinitesimaal hebben de matrices de vorm (3,12), de corresponderende representatie van de infinitesimale operatoren is dus

$$(3.13)\qquad J_k \rightarrow \tfrac{1}{2}\sigma_k;\ N_k \rightarrow \tfrac{1}{2}i\sigma_k.$$

Hiermee correspondeert de representatie (3,4) eveneens voor $j=\frac{1}{2}$, $j'=0$. Dan is immers $A_k = \frac{1}{2}\sigma_k$; $B_k=0$, wat via (3,2) opnieuw tot (3.13) leidt.

De representatie (3,1) voor $j=0$, $j'=\frac{1}{2}$ heeft als basisvectoren

$u_1^{\cdot}$ en $u_2^{\cdot}$; het is de complex geconjugeerde representatie $\bar{A}$. Infinitesimaal:

$$\bar{A} = 1+i\sum \varepsilon_k \tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_k + i\sum \varepsilon_{ok} \frac{i}{2}\bar{\sigma}_k ,$$

dus

(3.14) $$J_k \to -\tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_k \; ; \; N_k \to \tfrac{1}{2}i\,\bar{\sigma}_k .$$

Hiermee correspondeert (3,4) eveneens voor $j=0$, $j'=\frac{1}{2}$. Dan is $A_k=0$, $B_k=\frac{1}{2}\sigma_k$; dus infinitesimaal volgens (3,10):

$$g \to 1 - i\sum \varepsilon_k \cdot \tfrac{1}{2}\sigma_k - i\sum \varepsilon_{ok} \frac{i\sigma_k}{2} ,$$

of

(3.15) $$J_k \to \tfrac{1}{2}\sigma_k \; , \; N_k \to -\tfrac{1}{2}i\sigma_k .$$

Dit is weliswaar niet identiek met (3,14) maar is er wel <u>equivalent</u> mee, wegens de reeds eerder opgemerkte equivalentie

(3.16) $$-\bar{\sigma}_k = \sigma_2^{-1}\sigma_k\sigma_2 \qquad (k=1,2,3).$$

Om de corresponderende waarden van l_o, l_1 te vinden in (3,6), (3,7), (3,8), merken we op dat de draaigroep correspondeert met de unitaire unimodulaire transformaties; de representatie van H_+, H_3 correspondeert dus met de enkele l-waarde $\frac{1}{2}$. Dan moet $|l_o|=\frac{1}{2}$ zijn en $|l_1| = \frac{3}{2}$; het laatste opdat de representatie slechts de enkele waarde $l=\frac{1}{2}$ bevat. Beschouw eerst $l_o=\frac{1}{2}$, $l_1=\frac{3}{2}$; notatie: $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$. We kiezen het teken van l_o voor het gemak positief; het teken l_1 is dan echter niet meer willekeurig (vgl. pag. 107). De representatie van H_+, H_3 correspondeert blijkbaar met $J_k \to \frac{1}{2}\sigma_k$. De representatie ruimte is twee-dimensionaal en bevat de basisvectoren $\xi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ en $\xi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$. Uit (3,8) volgt:

$$A_{\frac{1}{2}} = i \quad ; \quad C_{\frac{1}{2}} = C_{\frac{3}{2}} = 0.$$

Dit in (3,7) geeft:

$$F_3\,\xi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = -\frac{i}{2}\,\xi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \; ; \; F_3\,\xi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{i}{2}\,\xi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$$

$$F_+\xi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = 0 \quad ; \quad F_+\xi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = -i\,\xi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

$$F_-\xi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = -i\,\xi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \quad ; \quad F_-\xi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = 0.$$

Hieruit volgt voor de transformatie van de vectoren in de basis $(\xi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}};\xi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}})$ onmiddellijk:

$$F_3 = -\frac{i\sigma_3}{2} \quad ; \quad F_{\pm} = -\left(\frac{i\sigma_1}{2} \pm i\,\frac{i\sigma_2}{2}\right),$$

of wel, volgens (3,5), $N_k \rightarrow \frac{i\sigma_k}{2}$. Dit is weer de representatie (3,13).

De representatie $l_o = \frac{1}{2}$, $l_1 = -\frac{3}{2}$ verschilt van de vorige alleen in het teken van $A_{\frac{1}{2}}$ en daarmee van de $F_{\pm}$, F_3. Dus nu $J_k \rightarrow \frac{1}{2}\sigma_k$; $N_k \rightarrow -\frac{1}{2}i\sigma_k$, als in (3.15).

Als laatste voorbeeld beschouwen we de representatie (3,1) voor $j=j'=\frac{1}{2}$: $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. De basis (3.1) is vier-dimensionaal en bevat de basisvectoren

$$u_1u_{\dot{1}} \ , \ u_1u_{\dot{2}} \ , \ u_2u_{\dot{1}} \ , \ u_2u_{\dot{2}} \ .$$

Een vector in deze ruimte geven we dan aan met

$$(3.17) \qquad (c_{1\dot{1}},\ c_{1\dot{2}},\ c_{2\dot{1}}\ ,\ c_{2\dot{2}})$$

Deze vector transformeert als het directe product van A en $\bar{A}$. De representatie is equivalent met de representatie van de Lorentz-groep $L_+^{\uparrow}$ door zichzelf. Om dit in te zien merken we op dat de transformatie wijze van de vectoren (3,17) onder A, geschreven kan worden als

$$\begin{pmatrix} \hat{c}_{1\dot{1}} & \hat{c}_{1\dot{2}} \\ \hat{c}_{2\dot{1}} & \hat{c}_{2\dot{2}} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c_{1\dot{1}} & c_{1\dot{2}} \\ c_{2\dot{1}} & c_{2\dot{2}} \end{pmatrix} A^*, \qquad (A^* = \bar{A}^T).$$

Men overtuige zich ervan dat de indices 1,2 met A transformeren, de indices $\dot{1},\dot{2}$ met $\bar{A}$. Vergelijken we dit met (2.3), (2.4) dan zien we direct dat de combinaties

$$\tfrac{1}{2}(c_{1\dot{1}}+c_{2\dot{2}}),\ \tfrac{1}{2}(c_{1\dot{2}}+c_{2\dot{1}}),\ \frac{i}{2}(c_{1\dot{2}}-c_{2\dot{1}}),\ \tfrac{1}{2}(c_{1\dot{1}}-c_{2\dot{2}})$$

zich transformeren als de vier-vector

$$(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

Dezelfde representatie vindt men terug in het formatisme (3,6),(3,7) als $l_0=0$, $l_1=2$: (0,2). Er zijn dan twee waarden van l: l=0,1. De kanonische basis bevat vier elementen:

$$\xi_{0,0};\ \xi_{1,-1},\ \xi_{1,0},\ \xi_{1,1}\ .$$

Onder de draaigroep alleen is $\xi_{0,0}$ invariant; de andere drie transformeren onder elkaar. Blijkbaar correspondeert $\xi_{0,0}$ dus met x_0, en $\xi_{1,-1}$, $\xi_{1,0}$, $\xi_{1,1}$ met de drie ruimte coördinaten x_1, x_2, x_3. De volgende combinaties transformeren precies als de vier-vector (x_0, x_1, x_2, x_3):

$$\xi_{0,0},\ \tfrac{1}{2}(\xi_{1,1}+\xi_{1,-1}),\ \tfrac{i}{2}(\xi_{1,1}-\xi_{1,-1}),\ \xi_{1,0}.$$

Dit is de enige vier-dimensionale irreducibele representatie.

Geconjugeerde representaties

Is $g \in L_+^\uparrow$ dan is ook $(g^{-1})^T \in L_+^\uparrow$.

Bewijs: Nemen van de inverse van conditie (1.6) geeft $g^{-1}I(g^T)^{-1}=I$ of $(g^{-1})^T\ {}^T I (g^{-1})^T = I$ dus $(g^{-1})^T$ is een element van de volle Lorentzgroep. De determinant is gelijk aan die van g en het teken van g_{00} verandert evenmin; hieruit volgt het gestelde.

Is nu gegeven een representatie $g \to T_g$, $(g^{-1})^T \to T_{(g^{-1})^T}$ dan is ook een representatie de afbeelding $g \to T_{(g^{-1})^T}$. Hiervan overtuigt men zich door de productregel te controleren. Deze representatie heet de geconjugeerde van de vorige en het is duidelijk dat de geconjugeerde van de geconjugeerde representatie weer de oorspronkelijke is. De beide representaties zijn dus elkaars geconjugeerde. We zullen nu nagaan wat de relatie is tussen de infinitesimale operatoren van geconjugeerde representaties. Een infinitesimale Lorentz-transformatie is

$$g = 1 - i\sum \varepsilon_k J_k + i\sum \varepsilon_{ok} N_k$$

$$(g^{-1})^T = 1 + i\sum \varepsilon_k J_k^T - i\sum \varepsilon_{ok} N_k^T$$

Uit (2.7) en (2.9) volgt

(3.18) $$J_k^T = -J_k \; ; \; N_k^T = N_k$$

dus $$(g^{-1})^T = 1 - i\sum \varepsilon_k J_k - i\sum \varepsilon_{ok} N_k .$$

Zij nu een representatie $J_k \rightarrow \mathcal{J}_k$; $N_k \rightarrow \mathcal{N}_k$ dan zijn de beide representaties:

$$g \rightarrow T_g = 1 - i\sum \varepsilon_k \mathcal{J}_k + i\sum \varepsilon_{ok} \mathcal{N}_k$$

$$g \rightarrow T_{(g^{-1})^T} = 1 - i\sum \varepsilon_k \mathcal{J}_k - i\sum \varepsilon_{ok} \mathcal{N}_k$$

$$= 1 - i\sum \varepsilon_k \tilde{\mathcal{J}}_k + i\sum \varepsilon_{ok} \tilde{\mathcal{N}}_k$$

met:

(3.19) $$\tilde{\mathcal{J}}_k = \mathcal{J}_k \; ; \; \tilde{\mathcal{N}}_k = -\mathcal{N}_k .$$

Deze relatie geeft het verband tussen deinfinitesimale operatoren in geconjugeerde representaties. Hieruit volgt dat ze dezelfde onderruimten invariant laten en dus gelijktijdig irreducibel zijn.

Zij nu gegeven een irreducibele representatie (l_0, l_1) van g, wat zijn dan de $(\tilde{l}_0, \tilde{l}_1)$ van de geconjugeerde representatie? Uit (3.19) volgt dat de representatie v.d. draaigroep dezelfde is, dus als we l_0 en $\tilde{l}_0$ beide positief kiezen, moet $l_0 = \tilde{l}_0$ zijn. Uit (3.5) en (3,19) volgt

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\pm} = -\mathcal{F}_{\pm} \quad ; \quad \tilde{\mathcal{F}}_3 = -\mathcal{F}_3 ,$$

dus, volgens (3,7), $\tilde{A}_l = -A_l$, $\tilde{C}_l = -C_l$. Het teken van C_l is willekeurig, zoals we opmerkten: elke keus leidt tot een equivalente representatie; het gaat dus om de eis $\tilde{A}_l = -A_l$ of, volgens (3.8):

$$\frac{i\tilde{l}_0\tilde{l}_1}{l(l+1)} = -\frac{il_0 l_1}{l(l+1)} .$$

Maar $\tilde{l}_0 = l_0$, dus $\tilde{l}_1 = -l_1$.

Dus de geconjugeerde representatie van (l_0, l_1) is $(l_0, -l_1)$ (of ook $(-l_0, l_1)$). We zien: een irreducibele representatie is dan en slechts dan equivalent met zijn geconjugeerde als een van de getallen l_0 en l_1 nul is.

Opmerking. Is $g \to T_g$ een representatie, dan ook $g \to (T_g^{-1})^T$ zoals men gemakkelijk ziet. Deze representatie is i.h.a. echter <u>verschillend</u> van de geconjugeerde representatie, daar i.h.a. $(T_g)^T \neq T_{g^T}$. Ook de complex geconjugeerde $\overline{T}_g$ van een representatie is weer een representatie. In het geval van de representatie $l_0=\frac{1}{2}$, $l_1=\frac{3}{2}$ is

$$T_g \sim (T_g^{-1})^T \quad \text{en} \quad (\tfrac{1}{2},-\tfrac{3}{2}) \sim T_{(g^{-1})^T} \sim \overline{T}_g \quad . \quad (\text{vgl. } (3,14)).$$

In de representatie $l_0=0$, $l_1=2$ is

$$T_g \sim T_{(g^{-1})^T} \sim \overline{T}_g \sim (T_g^{-1})^T \;.$$

Unitaire irreducibele representaties van $L_+^\uparrow$

Een representatie heet unitair als er in de representatie-ruimte R een positief definiete hermitische vorm bestaat die invariant is onder alle operatoren T_g. We zullen nagaan welke van de irreducibele representaties van $L_+^\uparrow$ unitair zijn. In dat geval is voor elke twee vectoren , uit R

(3,20) $$(T_g\xi, T_g\eta)=(\xi,\eta) \;.$$

Infinitesimaal is

$$T_g = 1 - i\sum \varepsilon_k \mathcal{J}_k + i\sum \varepsilon_{ok}\mathcal{N}_k$$

waarin $\mathcal{J}_k$, $\mathcal{N}_k$ een representatie is van J_k, N_k. De eis (3,20) betekent voor de infinitesimale operatoren

(3,21) $$(\xi,\mathcal{J}_k\eta)=(\mathcal{J}_k\xi,\eta) \;;\; (\xi,\mathcal{N}_k\eta)=(\mathcal{N}_k\xi,\eta),$$

d.w.z. ze moeten <u>hermitisch</u> zijn. Uit (3,5) en (3,21) volgt

(3,22) $$(\xi,H_3\eta)=(H_3\xi,\eta) \;;\; (\xi,H_+\eta)=(H_-\xi,\eta)$$

(3,23) $$(\xi,F_3\eta)=(F_3\xi,\eta) \;;\; (\xi,F_+\eta)=(F_-\xi,\eta).$$

Uit (3,22) en (3,6) volgt dat de kanonische basis $\{\xi_{lm}\}$ orthogonaal is:

$$(\xi_{lm},\xi_{l'm'}) \neq 0 \quad \text{slechts als } l=l',\ m=m'.$$

We kiezen hem bovendien genormeerd.

Hieruit, en uit (3,7) volgt dat de operatoren $F_{\pm}, F_3$ ieder essentieel slechts drie verschillende typen matrixelementen hebben die niet nul zijn. Onderzoekt men hiervoor de eis (3,23) dan blijkt deze te leiden tot de condities

$$C_l \sqrt{(l-m)(l-m-1)} = -\bar{C}_l \sqrt{(l-m)(l-m-1)}$$

$$A_l \sqrt{(l-m)(l+m+1)} = \bar{A}_l \sqrt{(l-m)(l+m+1)},$$

voor alle in de representatie optredende waarden van l en $m=l,l-1,\dots,-l$.

Voor $l\neq 0$ leidt dit tot

$$(3,24) \qquad C_l = -\bar{C}_l \ , \ A_l = \bar{A}_l \qquad (l>0) \ .$$

Voor $l=0$ zijn C_l en A_l onbepaald, maar de wortelvormen zijn nul, zodat aan de condities voldaan is. De conditie op A_l is volgens (3,8) slechts vervuld in de volgende twee gevallen.

1) l_1 zuiver-imaginair, l_0 willekeurig.

2) $l_0=0$, l_1 willekeurig.

De eis aan C_l is slechts vervuld als $\sqrt{\dfrac{(l^2-l_0^2)(l^2-l_1^2)}{4l^2-1}}$ reëel is, dus als $(l^2-l_0^2)(l^2-l_1^2)\geqslant 0$.

Daar $l\geqslant l_0$ moet $l^2-l_1^2\geqslant 0$ zijn.

In geval 1) is hieraan altijd voldaan. In geval 2) is $l\geqslant 1$ (het geval dat alleen $l=0$ optreedt geeft de identieke representatie), dus moet $l_1^2\leqslant 1$ zijn. Is l_1 reëel dan moet $|l_1|\leqslant 1$ zijn; is l_1 zuiver-imaginair dan is er altijd aan voldaan, maar dan zijn we weer in het eerste geval. Aan (3,24) is dus voldaan in de volgende twee gevallen:

1) l_1 is zuiver - imaginair, l_0 willekeurig

2) $l_0=0$, l_1 is reëel en $|l_1| \leq 1$.

In die gevallen slechts is de representatie (3,6) (3,7) van $L_+^{\uparrow}$ unitair.

We zagen dat de representatie dan en slechts dan eindig is als $|l_1| > |l_0|$ en als l_1 gelijk met l_0 geheel- of halftallig is. De enige eindige unitaire irreducibele representatie is dus $l_0=0$, $l_1=1$, dat is de identieke representatie.

De reeks 1) van unitaire, irreducibele representaties heet de hoofdreeks, de reeks 2) de supplementaire reeks.

IV Lie-groepen

Spreker: P.C. Baayen

Inhoudsoverzicht:

IV 1. Definitie van een Lie-groep

Definitie 1. Een varieteit is een samenhangende locaal euklidische Hausdorff-ruimte.

Definitie 2. Zij M een varieteit. Een kartering in M is een topologische afbeelding f van een open deelverzameling U van M op een open deelverzameling van een euklidische ruimte R^n.

Definitie 3. Zij M een varieteit, en stel f en g karteringen in M. Zij U het definitiegebied van f, V het definitiegebied van g, $\overline{f} = f|U \cap V$, $\overline{g} = g|U \cap V$, en zij $f(U \cap V) = W \subset R^n$. De karteringen f en g heten analytisch verbonden indien hetzij $U \cap V = \emptyset$, hetzij $U \cap V \neq \emptyset$ terwijl de afbeelding

$$\overline{g} \circ \overline{f}^{-1} : W \to R^n$$

analytisch is.

Definitie 4. Zij M een varieteit. Een analytische structuur op M is een stelsel $\mathcal{F}$ van karteringen in M met de volgende eigenschappen:

(1) ieder punt $\in$ M behoort tot het definitiegebied van een $f \in \mathcal{F}$ (wordt door $\mathcal{F}$ gekarteerd);

(2) elk tweetal karteringen in $\mathcal{F}$ is analytisch verbonden;

(3) iedere kartering in M die met iedere $f \in \mathcal{F}$ analytisch verbonden is, behoort zelf tot $\mathcal{F}$.

Het paar $(M,\mathcal{F})$ heet een analytische varieteit.

Opmerking 1. Zij M een varieteit. Een stelsel $\mathcal{F}$ van karteringen van $\mathcal{F}$ dat voldoet aan voorwaarden (1) en (2) van definitie 4 kan altijd op één en slechts één wijze worden uitgebreid tot een analytische structuur op M.

Opmerking 2. Zij $(M,\mathcal{F})$ een analytische varieteit. Voor iedere $f \in \mathcal{F}$ heeft dan het beeldgebied van f dezelfde dimensie. Men noemt dit de dimensie van M.

Definitie 5. Zij $(M,\mathcal{F})$ een analytische varieteit. Een reëelwaardige functie ϕ, gedefinieerd op een deelverzameling U van M, heet analytisch in $p \in U$ indien het volgende geldt: voor iedere $f \in \mathcal{F}$, gedefinieerd op een omgeving V van p, is

$$\phi \circ f^{-1} : f(V) \to R$$

een analytische functie.

De verzameling van alle functies ϕ , gedefinieerd op een open deelverzameling van M en analytisch in p, wordt aangegeven met $\mathcal{A}_p$.

Opmerking 3. Men kan gemakkelijk nagaan dat ϕ reeds analytisch is in p zodra er maar één kartering $f \in \mathcal{F}$ bestaat als aangegeven.

Definitie 6. Zij $(M,\mathcal{F})$ een analytische varieteit. Een reëelwaardige functie ϕ , gedefinieerd op een open deelverzameling U van M, heet analytisch in M indien ϕ analytisch is in iedere $p \in U$.

De verzameling van alle reëelwaardige functies ϕ die analytisch zijn in M geven we aan met $\mathcal{A}$.

Op overeenkomstige wijze definieert men het analytisch zijn van een afbeelding van een analytische varieteit $(M_1, \mathcal{F}_1)$ in een analytische varieteit $(M_2, \mathcal{F}_2)$.

<u>Definitie 7.</u> Een <u>analytische groep</u> is een paar $(G, \mathcal{F})$ met de volgende eigenschappen:

(1) G is een topologische groep;

(2) de ruimte van G is een varieteit, en $\mathcal{F}$ is een analytische structuur op G;

(3) de afbeelding $(x,y) \to xy$ van $G \times G$ in G is analytisch.

<u>Opmerking 4.</u> Er volgt eenvoudig, dat in een analytische groep ook de afbeelding $X \to X^{-1}$ analytisch is.

<u>Definitie 8.</u> Een Lie-groep is een locaalsamenhangende topologische groep met de eigenschap, dat op de samenhangende component G_o van de eenheid van G een analytische structuur $\mathcal{F}$ bestaat zodanig dat $(G_o, \mathcal{F})$ een analytische groep is.

<u>Opmerking 5.</u> Als G locaal samenhangend is, dan is G_o een <u>open</u> ondergroep van G.

IV 2. <u>Voorbeelden van Lie-groepen</u>

1. De vectorgroep R^n is een n-dimensionale Lie-groep.

2. De n-dimensionale torusgroep T^n is een Lie-groep.

3. De volle reële lineaire groep $GL(n,R)$ is een n^2-dimensionale Lie-groep.

Zij $A \in GL(n,R)$; zeg $A=(a_{ij})$. Als we $\delta > 0$ klein genoeg kiezen, dan is det $B \neq 0$ voor iedere $B=(b_{ij})$ met $|a_{ij}-b_{ij}|<\delta$ voor $i,j=1,2,\dots,n$. Bijgevolg is

$$A \to (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{nn})$$

een kartering, gedefinieerd voor alle $A \in GL(n,R)$, met waarden die in R^{n^2} een open verzameling vormen. En de groepsvermenigvuldiging in

GL(n,R) is de matrixvermenigvuldiging, wordt dus gedefinieerd door polynomen, en is a fortiori analytisch.

4. Evenzo is de complexe volle lineaire groep GL(n,C) voor iedere n een Lie-groep, en wel van dimensie $2n^2$.

5. Iedere discrete groep is een 0-dimensionale Lie-groep (en iedere nuldimensionale Lie-groep is discreet).

Iedere Lie-groep is locaal euklidisch. Op het Internationaal Wiskundig Congres in 1900 stelde D. Hilbert de vraag (het vijfde probleem uit de beroemde lijst van 23 destijds onopgeloste problemen) of omgekeerd iedere locaal euklidische groep ook een Lie-groep is (en zo niet, of de methoden uit de theorie der Lie-groepen aangepast kunnen worden voor locaal euklidische groepen).

John Von Neumann gaf in 1933 een positieve oplossing voor het geval van compacte groepen. Het algemene geval werd, eveneens in positieve zin, in 1952 opgelost door A. Gleason, D. Montgomery en L. Zippin (A. Gleason: Groups without Small Subgroups Ann.Math. 56(1952), 193-212; D, Montgomery and L. Zippin: Small Subgroups of finite-dimensional groups Ann.Math. 56(1952), 193-212).

Bijgevolg kunnen we een heel eenvoudige karakterisering van Lie-groepen geven:

Stelling 1. Een topologische groep is dan en slechts dan een Lie-groep, indien hij locaal euclidisch is.

Echter, juist de analytische structuur op een Lie-groep maakt het mogelijk zoveel prettiger met zo'n groep te werken. Dit rechtvaardigt mede-naast de historische ontwikkeling - de definitie als in IV 1.

Evenzo zonder bewijs vermelden we de volgende stellingen:

Stelling 2. Iedere gesloten ondergroep van een Lie-groep is een Lie-groep.

Stelling 3. Als G een Lie-groep is, en N een gesloten normaaldeler van G, dan is G/N een Lie-groep.

Uit stelling 2 concluderen we dat de rotatiegroep (voor iedere dimensie) en de Lorentzgroep (elk der groepen L, L_+, $L^{\uparrow}$ en $L_+^{\uparrow} \cup L_-^{\downarrow}$) Lie-groepen zijn.

Ook de unimodulaire groep $SL(n,C)$, bestaande uit alle complexe $n \times n$ matrices met determinant 1, is voor iedere n een Lie-groep. Tenslotte noemen we nog de unitaire groep $U(n)$ en de speciale unitaire groep $SU(n) = SL(n,C) \cap U(n)$, die ook Lie-groepen zijn voor iedere dimensie n.

Definitie 1. Een Lie-groep heet een lineaire Lie-groep als hij isomorph is met een ondergroep $GL(n,C)$ voor zekere n.

IV 3. Infinitesimale transformaties

De analytische structuur waarover we bij een Lie-groep kunnen beschikken stelt ons in staat om naar hartelust te differentieren. Hierdoor kunnen allerlei problemen gelineariseerd worden. Alvorens die uit te voeren moeten we ons echter eerst wat nader bezinnen op de eigenschappen van analytische varieteiten in het algemeen.

In het volgende is $(M,\mathcal{F})$ een vaste analytische varieteit.

Definitie 1. Een raakvector in $p \in M$ is een afbeelding $L: \mathcal{A}_p \to R$ met de volgende eigenschappen: als $\phi,\psi \in \mathcal{A}_p$, en als α,β willekeurige reële getallen zijn, dan geldt:

(1) $L(\alpha\phi+\beta\psi) = \alpha . L\phi+\beta . L\psi$;

(2) $L(\phi\psi) = L\phi . \psi(p) + \phi(p) . L\psi$.

De raakvectoren in p vormen een lineaire ruimte, de raakruimte, die we aanduiden met $\mathcal{L}_p$.

Als $\phi \in \mathcal{A}_p$ en $L \in \mathcal{L}_p$, dan heet $L(\phi)$ de afgeleide van ϕ in de richting L.

Zij $f \in \mathcal{F}$ een kartering in een omgeving U van p. Voor ieder punt $q \in U$ is $f(q)$ een punt van R^n; we schrijven voor dit punt

$$(x^1(q)\ x^2(q),\ldots,x^n(q)).$$

De n functies $x^1, x^2, \ldots, x^n$, gedefinieerd in U, bepalen f volkomen. In plaats van over f spreken we ook over "de kartering (x^i)". Voor $x^i(p)$ schrijven we x^i_0.

Stelling 1. Zij (x^i) een kartering in p, $\phi \in \mathcal{A}_p$, $L \in \mathcal{L}_p$. Dan is

$$L(\phi)= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\phi}{\partial x^i} L(x^i) .$$

(Hierbij moet men $\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$ als volgt interpreteren: de funtie $\phi(q)$ is uit te drukken in de coördinaten $x^1(q)\ldots x^n(q)$ (in de kartering (x^i)), zeg $\phi(q)=\phi^*(x^1(q),x^2(q),\ldots,x^n(q))$; we stellen

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^i} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right|_p = \left.\frac{\partial\phi^*}{\partial u^i}\right|_{u^i=x^i(p)} ,$$

per definitie).

Bewijs.

a. Als c een constante is, en $L \in \mathcal{L}_p$, dan is $L(c)=0$. Want

$$L(c) = c.L(1)= c.L(1.1) =$$

$$= c(L(1).1 + 1\, L(1))= 2\, L(c).$$

b. Zij $\phi \in \mathcal{A}_p$. In een omgeving van p geldt:

$$\phi=a_0+a_1(x^1-x^1_0))+\ldots+a_n(x^n-x^n_0)+ \sum_{i,j=1}^{n} (x^i-x^i_0)(x^j-x^j_0)g_{ij} ,$$

met $g_{ij}\in \mathcal{A}_p$; $x^i_0=x^i(p)$; $a_i= \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$. Dan:

$$L(\phi)=a_1L(x^1-x^1_0)+\ldots+a_nL(x^n-x^n_0)+ \sum_{i,j=1}^{n} L((x^i-x^i_0)(x^j-x^j_0)g_{ij}) =$$

$$=a_1Lx^1+\ldots+a_nLx^n+ \sum_{i,j=1}^{n} \{(x^i_0-x^i_0)g_{ij}(p)L(x^j-x^j_0) +$$

$$+ (x^j_0-x^j_0)g_{ij}(p)L(x^i-x^i_0)+(x^i_0-x^i_0)(x^j_0-x^j_0)Lg_{ij}\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_iLx^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\phi}{\partial x^i} . Lx^i.$$

M.a.w. iedere raakvector is van de vorm L= $\sum_{i=1}^{n} \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$; omgekeerd wordt voor iedere keuze der λ^i een raakvector gedefinieerd door

$$L = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

(komt overeen met differentiatie in de richting (λ^i), i.e. langs een kromme

$$x^i=x^i(t)=x_0^i+\lambda^i t+O(t^2)).$$

<u>Gevolg 1.</u> De n raakvectoren $\frac{\partial}{\partial x^i}$ vormen een basis voor $\mathcal{L}_p$.

Hun onafhankelijkheid volgt uit het feit dat

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(x^j) = \delta_i^j .$$

<u>Gevolg 2.</u> Als (x^i) en (y^i) beide karteringen zijn in een omgeving van p, dan is

$$\frac{\partial}{\partial y^k} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} .$$

M.a.w. (analytische) coördinatentransformaties in M resulteren in lineaire coördinatentransformaties in $\mathcal{L}_p$, met als transformatiematrix de Jacobi aan.

<u>Definitie 2.</u> Een <u>infinitesimale transformatie</u> X op M is een verzameling raakverctoren X_p, één voor elke $p \in M$.

Zij X een infinitesimale transformatie op M, en zij $\phi \in \mathcal{A}$. Voor iedere p uit het definitiegebied van ϕ is $X_p(\phi)$ gedefinieerd, en dit is een reëel getal. Zo verkrijgen we een reëelwaardige functie $X\phi$, gedefinieerd op het definitiegebied van ϕ.

<u>Definitie 3.</u> Een infinitesimale transformatie X op M heet <u>analytisch</u> als $X\phi \in \mathcal{A}$ voor iedere $\phi \in \mathcal{A}$. De verzameling van alle analytische infinitesimale transformaties op M geven we aan met $\mathcal{L}$.

Stelling 2. $\mathcal{L}$ bestaat uit alle afbeeldingen $X: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ die voldoen aan de volgende drie voorwaarden:

(1) voor iedere $p \in M$ en voor iedere $\phi \in \mathcal{A}_p$ is de functie $X\phi$ gedefinieerd in p;

(2) $X(\alpha\phi+\beta\psi)=\alpha X\phi+\beta X\psi$, voor $\phi,\psi \in \mathcal{A}$ en $\alpha,\beta \in R$.

(3) $X(\phi\psi) = X\phi.\psi+\phi.X\psi$, voor willekeurige $\phi,\psi \in \mathcal{A}$.

Bewijs.

Iedere analytische infinitesimale transformatie X voldoet kennelijk aan (1),(2),(3). Stel nu $X: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ voldoet aan deze drie voorwaarden. Voor iedere $p \in M$ is dan de toevoeging $\phi \to (X\phi)(p)$, $\phi \in \mathcal{A}_p$, een raakvector X_p. Dus is X een infinitesimale transformatie. En X is analytisch, want X beeldt $\mathcal{A}$ in zichzelf af.

Stel nu $X,Y \in \mathcal{L}$. De samengestelde transformatie XY,

$$(XY)\ (\phi) = X(Y(\phi)),$$

voor willekeurige $\phi \in \mathcal{A}$, is zelf i.h.a. geen infinitesimale transformatie. Weliswaar beeldt XY de verzameling $\mathcal{A}$ in zichzelf af, en is aan de eerste twee voorwaarden van stelling 2 voldaan, maar de derde voorwaarde geeft moeilijkheden:

$$(XY)(\phi\psi) = X(Y\phi.\psi + \phi.Y\psi) =$$

$$= (XY)\phi.\psi+Y\phi.X\psi+X\phi.Y\psi+\phi.(XY)\psi;$$

de termen $Y\phi.X\psi$ en $X\phi.Y\psi$ bederven het. Kennelijk geldt echter

$$(XY-YX)(\phi\psi)=(XY-YX)\phi.\psi+\phi.(XY-YX)\psi,$$

en dus is XY-YX wel weer een infinitesimale transformatie:
Deze infinitesimale transformatie heet de commutator van X en Y; notatie: $[X,Y]$. We hebben bewezen:

Stelling 3. Als $X \in \mathcal{L}$ en $Y \in \mathcal{L}$, dan ook $[X,Y] \in \mathcal{L}$.

Men kan onmiddellijk verifieren dat verder geldt:

Stelling 4. Als $X, Y, Z \in \mathcal{L}$, dan:

(1) de toevoeging $(X,Y) \to [X,Y]$ is bilineair;

(2) $[X,Y] + [Y,X] = 0$;

(3) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

(identiteit van Jacobi).

IV 4. Lie-algebra's

Zij K een lichaam (bijv. het lichaam R der reële getallen of het lichaam C der complexe getallen).

Definitie 1. Een n-dimensionale Lie-algebra over K is een n-dimensionale lineaire ruimte L over K, waarin een binaire operatie $(A,B) \to [A,B]$ is gedefinieerd met de volgende eigenschappen:

(1) $[\alpha A_1 + \beta A_2, B] = \alpha[A_1,B] + \beta[A_2,B]$;

$\quad [A, \alpha B_1 + \beta B_2] = \alpha[A,B_1] + \beta[A,B_2]$;

(2) $[A,B] + [B,A] = 0$;

(3) $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$.

Stelling IV 3.3 tezamen met stelling IV 3,4 leveren ons:

Stelling 1. Zij $(M, \mathcal{F})$ een analytische varieteit. De lineaire ruimte $\mathcal{L}$ van alle infinitesimale transformaties op M is een reële Lie-algebra t.o.v. het commutatorproduct.

Andere voorbeelden van Lie-algebra's:

1. Zij $M(n,R)$ de verzameling van alle reële $n \times n$ matrices. Definieer matrix optelling en vermenigvuldiging met een scalar als gewoonlijk, en zij

$$[A,B] = AB - BA.$$

Dan is $M(n,R)$ een reële Lie-algebra van dimensie n^2.

2. Zij L de verzameling van alle complexe $n \times n$ matrices met spoor 0. Wanneer optelling, scalaire vermenigvuldiging en commutator-

product gedefinieerd worden als onder 1, dan wordt L tot een reële Lie-algebra van dimensie $2n^2-2$.

Definitie 2. Zij L een Lie-algebra over K, en zij $M \subset L$. Dan heet M een deelalgebra van L indien geldt:

(1) M is een deelvectorruimte van L;

(2) $A,B \in M \Longrightarrow [A,B] \in M$.

M heet een ideaal indien zelfs

(3) $A \in M,\ B \in L \Longrightarrow [A,B] \in M$.

Definitie 3. Stel L_1 en L_2 zijn Lie-algebra's over K. Een afbeelding $h: L_1 \to L_2$ heet een homomorphisme indien geldt:

(1) h is een lineaire afbeelding van de vectorruimte L_1 in de vectorruimte L_2;

(2) $h[A,B]=[hA,hB]$, voor willekeurige $A,B \in L_1$.

Indien h bovendien 1-1 is, dan heet h een isomorphisme. Twee Lie-algebra's heten isomorph indien er een isomorphisme bestaat van de ene op de andere.

Geheel als in de theorie der gewone ringen en algebra's kan men aantonen dat, wanneer $h: L_1 \to L_2$ een homomorphisme is, de kern $h^{-1}(0) = \{A \in L_1 : h(A)=0\}$ een ideaal is in L_1, en dat $L_1/\text{kern}(h)$ en $h(L_1)$ isomorph zijn. De factoralgebra L/M (M ideaal in L) wordt als gebruikelijk gedefiniëerd; evenzo directe producten etc.

Zij L een n-dimensionale Lie-algebra, en zij $\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$ een basis voor de vectorruimte L. Dan zijn er scalairen c_{ij}^k $(i,j,k=1,2,\dots,n)$ zodanig dat

$$[X_i,X_j]= \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k \, X_k.$$

Deze n^3 scalairen heten de structuurconstanten van L. Zij voldoen aan de relaties:

(1) $$c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0 \ ;$$

(2) $$\sum_{r=1}^{n} c_{ij}^r c_{rk}^s + \sum_r c_{jk}^r c_{ri}^s + \sum_r c_{ki}^r c_{rj}^s = 0;$$

voor $i,j,k,s = 1,2,\dots,n$.

Omgekeerd: als L een n-dimensionale vectorruimte is, $\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ een basis in L, en als we definieren, voor willekeurige $A=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i X_i$, $B=\sum_{i=1}^{n}\beta^i X_i$ in L:

$$[A,B] = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha^i\beta^j c_{ij}^{k} \right) X_k ,$$

waar de c_{ij}^k scalairen zijn die voldoen aan (1) en (2), dan wordt L tot een Lie-algebra.

Een Lie-algebra waarvan de elementen matrices zijn (alle van dezelfde graad), die op de normale wijze opgeteld en met een scalair vermenigvuldigd worden, terwijl het commutatorproduct gedefinieerd wordt door: $[A,B] = AB-BA$, heet een lineaire Lie-algebra.

Anders gezegd: L is een reële (complexe) lineaire Lie-algebra indien L een deelalgebra is van $M(n,R)$ ($M(n,C)$), voor zekere n.

Een hoogst belangrijke en diepe stelling, afkomstig van I.D.ADO (Über die Darstellung von S. Lieschen Gruppen durch lineare Substitutionen, C.R. Acad.Sci. U.R.S.S. 3(1935), 7-8; en: Predstavlenie algebra Lie matritsami, Uspechi Mat. Nauk (N.S.) 2, 6(22), 159-173)(1947) spreekt uit dat in zekere zin iedere eindig-dimensionale Lie-algebra lineair is:

Stelling van ADO: Iedere eindig-dimensionale Lie-algebra is isomorph met een lineaire Lie-algebra.

IV 5. De Lie-algebra van een Lie-groep

Zij G een Lie-groep; zij G_0 de samenhangende component van het eenheidselement e van G, en zij $\mathcal{F}$ een analytische structuur op G_0 die $(G_0,\mathcal{F})$ tot een analytische groep maakt.

Daar $(G_0,\mathcal{F})$ een analytische varieteit is, is de ruimte $\mathcal{L}$ van al zijn infinitesimale transformaties een Lie-algebra.
Deze Lie-algebra is ons echter te groot; veel belangrijker is de deel algebra bestaande uit alle infinitesimale translaties.

Notatie-afspraak. Als $\phi \in \mathcal{A}$ en $a \in G_0$, dan zij ϕ^a de functie

$$\phi^a(p) = \phi(ap);$$

als U het definitiegebied is van ϕ, dan is $a^{-1}U$ het definitiegebied van ϕ^a. Als $\phi \in \mathcal{A}_p$, dan $\phi^a \in \mathcal{A}_{a^{-1}p}$; i.h.b.: als $\phi \in \mathcal{A}_p$, dan $\phi^p \in \mathcal{A}_e$.

<u>Definitie 1.</u> Zij $L \in \mathcal{L}_e$. De infinitesimale transformatie $X=(X_p)_{p\in G_0}$ op G_0 gedefinieerd door

$$X_p\phi = L\phi^p$$

voor willekeurige $p\in G_0$ en $\phi\in\mathcal{A}_p$, heet de <u>infinitesimale rechtstranslatie</u> behorend bij L.

De verzameling van alle infinitesimale rechtstranslaties, verkregen door alle $L \in \mathcal{L}_e$ te beschouwen, geven we aan met $\Lambda(G)$.

<u>Stelling 1.</u> Iedere infinitesimale rechtstranslatie is analytisch, en $\Lambda(G)$ is een deelalgebra van de Lie-algebra .

<u>Definitie 2.</u> De Lie-algebra $\Lambda(G)$ heet <u>de Lie-algebra van G.</u> (In oudere literatuur: de <u>infinitesimaalring</u> van G).

Daar iedere infinitesimale rechtstranslatie X ondubbelzinnig bepaald is door $X_e \in \mathcal{L}_e$, terwijl omgekeerd iedere $L\in\mathcal{L}_e$ een infinitesimale rechtstranslatie bepaalt, is de vectorruimte $\Lambda(G)$ isomorph met de vectorruimte $\mathcal{L}_e$; men identificeert hem dikwijls met $\mathcal{L}_e$.
Er volgt:

<u>Stelling 2.</u> $\Lambda(G)$ heeft dezelfde dimensie als G.

Als (x^i) een kartering uit $\mathcal{F}$ is, vormen de n raakvectoren $\frac{\partial}{\partial x^i}$ (i=1,2,...,n) een basis voor $\mathcal{L}_e$. Indien we $\mathcal{L}_e$ met $\Lambda(G)$ identificeren, dan vormen $\frac{\partial}{\partial x^1}$, ..., $\frac{\partial}{\partial x^n}$ een basis voor $\Lambda(G)$. Men noemt $\frac{\partial}{\partial x^1}$, $\frac{\partial}{\partial x^2}$, ..., $\frac{\partial}{\partial x^n}$ de infinitesimale transformaties van de groep G in de kartering (x^i).

N.B. De Lie-algebra $\Lambda(G)$ van G is invariant met G verbonden, onafhankelijk van de kartering. Dit geldt niet voor de infinitesimale transformaties $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$.

De structuurconstanten van $\Lambda(G)$ noemt men ook de structuurconstanten van G ; ook zij hangen af van de gekozen kartering (ze transformeren als een tensor).

Er is een belangrijke alternatieve methode om de Lie-algebra van een Lie-groep G te definieren, n.l. via de éénledige ondergroepen van G; zie IV.10.

IV. 6. De Lie-algebra van de volle lineaire groep

Zij $G = GL(n,C)$, de complexe volle lineaire groep. Wat is $\Lambda(G)$? Beschouw de volgende kartering van een omgeving U van de eenheid e in G: een willekeurige matrix uit U wordt geschreven in de vorm

$$\begin{pmatrix} 1+x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & 1+x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & 1+x_{nn} \end{pmatrix}$$

(dan heeft e de coördinaten $(0,0,\ldots,0)$).

Zij $X \in \Lambda(G)$. Dan is X_e van de vorm

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} ;$$

de $a_{ij}=a_{ij}(X)$ vormen een complexe $n \times n$ matrix:

$$A=A(X)=(a_{ij}(X)) \in M(n,C).$$

De toevoeging $X \rightarrow A(X)$ is lineair. Hij is ook 1-1: als $A(X)=0$, dan is

$X_e=0$, dus $X=0$. Dus is $X \rightarrow A(X)$ een lineaire isomorphisme van $\Lambda(G)$ op een lineaire deelruimte van $M(n,C)$. Daar $\Lambda(G)$ en $M(n,C)$ dezelfde dimensie hebben, volgt dat $\Lambda(G)$ wordt afgebeeld op $M(n,C)$.

Hierbij wordt $[X,Y] = XY-YX$ afgebeeld op $A(X).A(Y)-A(Y)A(X)$.

Gevolg: als we in $M(n,C)$ het commutatorproduct "normaal" definieren:

$$[A,B] = AB-BA,$$

(waardoor $M(n,C)$ tot een Lie-algebra wordt), dan blijkt de Lie-algebra $M(n,C)$ isomorph met de Lie-algebra van $GL(n,C)$.

Gewoonlijk identificeert men $M(n,C)$ met de Lie-algebra van $GL(n,C)$.

Op overeenkomstige wijze stelt men vast:

De Lie-algebra van $GL(n,R)$ is $M(n,R)$.

In een volgende paragraaf zullen we nagaan wat voor Lie-algebra's de draaiingsgroepen $O(n)$, de unitaire groepen $U(n)$, de Lorentz-groep etc. bezitten.

IV.7. Locaal isomorphe groepen

De Lie-algebra $\Lambda(G)$ van een Lie-groep G is a.h.w. de raakruimte in het eenheidselement e van G. I.h.b. is $\Lambda(G)$ volkomen bepaald door een omgeving van e in G.

Een consequentie is dat locaal isomorphe groepen dezelfde Lie-algebra hebben.

Definitie 1. Een locaal homomorphisme van een Lie-groep G op een Lie-groep H is een continue afbeelding van een omgeving U van het eenheidselement e van G op een omgeving V van het eenheidselement e' van H, zodanig dat

$$h(e) = e' ;$$
$$h(p.q) = h(p).\, h(q);$$
$$h(r^{-1}) = h(r)^{-1} ,$$

voor alle $p, q, r \in U$ waarvoor ook $p \circ q \in U$ en $r^{-1} \in U$.

Is h 1-1, en is de omkering $h^{-1}: V \to U$ een locaal homomorphisme van H op G, dan heet h een <u>locaal isomorphisme</u>.

De groepen G en H heten <u>locaal isomorph</u> als er een locaal isomorphisme van G op H bestaat.

<u>Voorbeelden</u>.

<u>1</u>. De cirkelgroep (de additieve groep der reële getallen modulo 1; ofwel: de multiplicatieve groep der complexe getallen z met $|z|=1$) en de additieve groep van de reële getallen zijn locaal isomorph.

<u>2</u>. Algemener: de torusgroep T^n en de vectorgroep R^n zijn locaal isomorph.

<u>3</u>. De volle rotatiegroep O(3) (determinant $\pm$ 1) en de speciale rotatiegroep SO(3) (determinant + 1) zijn locaal isomorph; beide zijn locaal isomorph met de unitaire U(2) en met de speciale uniatire groep SU(2): zie II. 3.4. (pag. 18/19).

<u>4</u>. De volle Lorentzgroep L, de orthogonale Lorentzgroep $L^{\uparrow}$, de eigenlijke Lorentzgroep L_+, de naamloze Lorentzgroep $L_+^{\uparrow} \cup L_-^{\downarrow}$ en de beperkte Lorentzgroep $L_+^{\uparrow}$ zijn alle locaal isomorph. Ieder is locaal isomorph met de complexe unimodulaire groep SL(2,C): zie III. 2.2. (pag. 89/90).

We kondigen reeds aan:

<u>Stelling 1</u>. Locaal isomorphe Lie-groepen hebben isomorphe Lie-algebra's.

Om deze uitspraak geheel zinvol te doen zijn moeten we nog definieren wat isomorphe Lie-algebra's zijn.

<u>Definitie 2</u>. Een <u>homomorphisme</u> van een Lie-algebra L op een Lie-algebra M is een lineaire afbeelding h van L op M zodanig dat

$$h[X, Y] = [hX, hY]$$

voor willekeurige $X, Y \in L$.

Is h bovendien 1-1, en is h^{-1} ook een homomorphisme (van M op L),

dan heet h een isomorphisme van L op M.
Twee Lie-algebra's L,M heten isomorph als er een isomorphisme van L op M bestaat.

Definitie 3. Een homomorphisme h van een topologische groep G op een topologische groep H heet een overdekkingshomomorphisme als het een locaal isomorphisme is.

Exacter: er moet een omgeving U van de eenheid e in G bestaan zodanig dat $h|U$ een locaal isomorphisme is.

Indien er een overdekkingshomomorphisme van G op H bestaat, dan heet G een overdekkingsgroep van H.

Voorbeelden: De vectorgroep R^n is een overdekkingsgroep van de n-dimensionale torus T^n. De speciale unitaire groep SU(2) is een overdekkingsgroep van de draaiingsgroep SO(3). De complexe unimodulaire groep SL(2,C) is een overdekkingsgroep van $L_+^\uparrow$.

Stelling 2. Als h een overdekkingshomomorphisme van G op H is, dan is de kern van h een discrete ondergroep van G. Omgekeerd: is N een discrete normaal-deler van G, dan is de natuurlijke homomorphie $G \to G/N$ een overdekkingshomomorphisme.

Als de kern van h eindig is, zeg uit k elementen bestaat, dan noemt men G wel een k-bladige overdekking van H.

Van groot belang is de volgende stelling

Stelling 3. Iedere samenhangende Lie-groep G bezit een enkelvoudig samenhangende overdekkingsgroep. Deze is uniek, in de zin dat twee enkelvoudig samenhangende overdekkingsgroepen van G altijd topologisch isomorph zijn.

Men noemt de enkelvoudig samenhangende overdekkingsgroep van G meestal de universele overdekkingsgroep van G. Het volgende is n.l. waar: als U de universele overdekkingsgroep is van G, zeg met bijbehorend overdekkingshomomorphisme h, en als H een willekeurige overdekkingsgroep is van G, zeg met overdekkingshomomorphisme h_1, dan "zit H tussen U en G in": er is een overdekkingshomomorphisme h_2 van U op H zodanig dat $h_1 o h_2 = h$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[dr, "h_2"] \arrow[dd, "h"'] & \\ & H \arrow[dl, "h_1"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Uit het voorgaande volgt dat een Lie-groep G en zijn universele overdekkingsgroep dezelfde Lie-algebra bezitten.

Voorbeelden: Daar R^n, SU(2) en SL(2,C) enkelvoudig samenhangend zijn, zijn zij de universele overdekkingsgroepen van resp. T^n, SO(3) en L_+. En wel is SU(2) een tweebladige overdekking van SO(3) en SL(2,C) een tweebladige overdekking van $L_+^\dagger$.

Stelling 4. Zij G enkelvoudig samenhangend, en zij h een locaal homomorphisme van G in H; zeg h is gedefinieerd op de omgeving U van het eenheidselement van G. Dan bestaat er een (globaal) homomorphisme $\hat{h} : G \to H$ met $\hat{h}|U = h$.

Gevolg. Stel G_0 en H_0 zijn samenhangende topologische groepen; zij G resp H de universele overdekkingsgroep van G_0 resp. H_0, met bijbehorend overdekkingshomomorphisme g resp. h.

Als f_0 een willekeurige locaal homomorphsime van G_0 in H_0 is, dan bestaat er een (globaal) homomorphisme f: $G \to H$ zodanig dat $h o f = f_0 o g$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & H \arrow[d, "h"] \\ G_0 \arrow[r, "f_0"'] & h_0 \end{tikzcd}$$

Het belang van stelling 4, tezamen met stelling 3, zal blijken bij de bespreking van representaties van Lie-groepen.

IV.8. Verbanden tussen Lie-groepen en hun Lie-algebra's

Zij G een Lie-groep en zij H een analytische ondergroep van G.
De Lie-algebra $\Lambda(G)$ van G konden we identificeren met de raakruimte $\mathcal{L}_e$ in het eenheidselement e van G.

Als $f \in \mathcal{A}_e(G)$, zeg f gedefinieerd op $U \subset G$, dus schrijven we $\hat{f}$ voor $f|H \cap U$; $\hat{f} \in \mathcal{A}_e(H)$.
Zij

$$M = \{X \in \mathcal{L}_e : Xf = 0 \text{ voor alle } f \in \mathcal{A}_e \text{ met } \hat{f} = 0\}.$$

Dan is M een deelalgebra van de Lie-algebra $\Lambda(G)$. Men kan iedere $X \in M$ interpreteren als een raakvector e in H.
Daarbij blijkt dat iedere raakvector aan e in H verkregen wordt.
Zodoende wordt M geïdentificeerd met $\Lambda(H)$.

Stelling 1. Zij G een Lie-groep, H een analytische ondergroep. Dan is de Lie-algebra $\Lambda(H)$ van H (isomorph met) een subalgebra van de Lie-algebra $\Lambda(G)$ van G.

De omkering van deze stelling ligt veel dieper.

Stelling 2. Zij G een Lie-groep, en zij M een deelalgebra van $\Lambda(G)$. Dan heeft G een analytische subgroep H zodanig dat $\Lambda(H)=M$. De ondergroep H is dan en slechts dan een normaaldeler van G, indien M een ideaal is in $\Lambda(G)$.

We vermelden als toepassing van stelling 2 en de stelling van Ado (zie IV.4) het volgende:

Omkering van de derde stelling van Lie: Zij L een willekeurige eindig-dimensionale Lie-algebra. Er bestaat een Lie-groep G waarvoor $\Lambda(G)$ isomorph is met L.

Bewijs:

Volgens de stelling van Ado is L isomorph met een lineaire Lie-algebra M; zeg M is een deel-algebra van M(n). Volgens IV.6 is M(n) (isomorph met) de Lie-algebra van GL(n). Volgens stelling 2 hierboven is er dus een analytische ondergroep G van GL(n) waarvoor $\Lambda(G)$ isomorph is met M, en dus met L.

Als G_1 en G_2 Lie-groepen zijn, dan ook het topologische directe product $G_1 \times G_2$ (dat is nl. weer locaal-euclidisch). Er geldt:

<u>Stelling 3.</u> Als G_1 en G_2 Lie-groepen zijn, dan is $\Lambda(G_1 \times G_2)$ isomorph met $\Lambda(G_1) \times \Lambda(G_2)$.

We vermelden ook:

<u>Stelling 4.</u> Zij G een Lie-groep, H een analytische ondergroep; stel H is een normaaldeler in G. Dan is $\Lambda(G/H)$ isomorph met $\Lambda(G)/\Lambda(H)$.

In de volgende paragraaf komt het verband tussen de representaties van een Lie-groep G en de representaties van zijn Lie-algebra nog aan de orde.

Voor verdere weerspiegelingen van de structuur van G in de algebra $\Lambda(G)$ raadplege men de literatuur.

IV. 9. Representaties van Lie-groepen

Stel $\mathfrak{M}_1$ en $\mathfrak{M}_2$ zijn twee analytische varieteiten, en stel Φ is een analytische afbeelding van $\mathfrak{M}_1$ in $\mathfrak{M}_2$. Aan iedere $x \in \mathfrak{M}_1$ voegen we toe een afbeelding $d\Phi_x$ van $\mathcal{L}_x(\mathfrak{M}_1)$ in $\mathcal{L}_{\Phi x}(\mathfrak{M}_2)$, als volgt. Als $L \in \mathcal{L}_x(\mathfrak{M}_1)$, dan is $(d\Phi_x)L$ die raakvector in Φx aan $\mathfrak{M}_2$ waarvoor

$$((d\Phi_x)L)(g) = L(g \circ \Phi)$$

voor elke $g \in \mathcal{A}_{\Phi x}(\mathfrak{M}_2)$. Men ziet eenvoudig dat $(d\Phi_x)L$ inderdaad een raakvector is.

Zij nu Φ i.h.l. een analytische afbeelding van een Lie-groep G in een Lie-groep H. Dan induceert $d\Phi_e : \mathcal{L}_e(G) \to \mathcal{L}_{e'}(H)$ op natuurlijke wijze een afbeelding $d\Phi$: $\Lambda(G) \to \Lambda(H)$: als $X \in \Lambda(G)$, dan zij $(d\Phi)X$ de infinitesimale rechtstranslatie X' in H met

$$X'_{e'} = (d\Phi_e)X_e$$

De afbeelding $d\Phi$, die kennelijk een lineaire afbeelding is van $\Lambda(G)$ in $\Lambda(H)$, heet de infinitesimale afbeelding behorend bij Φ.

Stelling 1. Zij Φ: $G \to H$ een analytisch homomorphisme van een Lie-groep G in een Lie-groep H. Voor iedere $X \in \Lambda(G)$ en iedere $p \in G$ geldt:

$$((d\Phi)X)_{\Phi p} = (d\Phi_p)X_p.$$

Bewijs

Zij $h \in \mathcal{A}_{\Phi p}(H)$. We merken eerst op dat

$$h^{\Phi p} \circ \Phi = (h \circ \Phi)^p.$$

Bijgevolg is

$$((d\Phi_p)X_p)h = X_p(h \circ \Phi) = X_e(h \circ \Phi)^p = X_e(h^{\Phi p} \circ \Phi) =$$

$$= ((d\Phi_e)X_e)h^{\Phi p} = ((d\Phi)X)_p\ h.$$

Gebruik makend van stelling 1 bewijst men dat ingeval Φ: G → H een analytisch homomorphisme is, ook

$$(d\Phi)[X,Y] = [(d\Phi)X, (d\Phi)Y],$$

voor alle $X,Y \in \Lambda(G)$. M.a.w.

Stelling 2. Zij Φ: G → H een analytisch homomorphisme van een Lie-groep G in een Lie-groep H. Dan is $d\Phi$ een homomorphisme van $\Lambda(G)$ in $\Lambda(H)$.

Bewijs

Voor willekeurige $X \in \Lambda(G)$ en willekeurige $h \in \mathcal{A}(H)$ geldt, indien $X' = (d\Phi)X$:

$$(X'h) \circ \Phi = X(h \circ \Phi).$$

Immers, zij $p \in G$; dan is

$$(X'h \circ \Phi)(p) = (X'h)(\Phi p) = ((d\Phi)X)_{\Phi p}h =$$

$$= (d\Phi_p)X_p h = X_p(h \circ \Phi) = (X(h \circ \Phi))(p).$$

Stel nu $X,Y \in \Lambda(G)$; zij $X' = (d\Phi)X$ en $Y' = (d\Phi)Y$. Als $h \in \mathcal{A}(H)$, dan is

$$(X'Y'h) \circ \Phi = X(Y'h \circ \Phi) = X(Y(h \circ \Phi))$$

en bijgevolg

$$([X',Y']h) \circ \Phi = [X,Y](h \circ \Phi) = ((d\Phi)[X,Y]h) \circ \Phi .$$

Hieruit volgt dat inderdaad $[(d\Phi),X, (d\Phi)Y] = (d\Phi)[X,Y]$.

Ieder analytisch homomorphisme tussen Lie-groepen bepaalt zo een (infinitesimaal) homomorphisme tussen de bijbehorende Lie-algebra's. I.h.b. hoort bij iedere (analytische) representatie van een Lie-groep G een "infinitesimale representatie" van de Lie-algebra $\Lambda(G)$.

Het omgekeerde is niet helemaal waar. Wel geldt:

Stelling 3. Stel G en H zijn Lie-groepen. Zij ϕ een homomorphisme van $\Lambda(G)$ in $\Lambda(H)$ dan bestaat er een analytisch locaal homomorphisme $\Phi:G \to H$ zodanig dat $\phi = d\Phi$.

Het bewijs van deze stelling laten we achterwege.
Aangezien ieder locaal homomorphisme van een enkelvoudig samenhangende groep G in een groep H kan worden voortgezet tot een globaal homomorphisme (IV. 7, stelling 4), concluderen we:

Stelling 4. Stel G en H zijn Lie-groepen, en zij G enkelvoudig samenhangend. Als ϕ: $\Lambda(G) \to \Lambda(H)$ een willekeurig homomorphisme is, dan is er een analytisch homomorphisme $\Phi:G \to H$ met $d\Phi = \phi$.

Gevolg: Er is een 1-1 correspondentie tussen alle (infinitesimale) representaties van de Lie-algebra $\Lambda(G)$ van een samenhangende Lie-groep G, en alle analytische representaties van de universele overdekkingsgroep van G. I.h.b. is er een 1-1 correspondentie tussen alle tweewaardige representaties van de Lorentz-groep $L_+^\uparrow$ en al zijn infinitesimale representaties.

Een belangrijke representatie van een Lie-groep G is de zogenaamde geadjungeerde representatie.

Als $p \in G$, dan zij ρ_p het inwendige automorphisme

$$\rho_p(x) = p\,x\,p^{-1}$$

van G (x een willekeurig element van G). De afbeelding $p \to \rho_p$ is een homomorphie van G in de groep $A(G)$ van alle analytische automorphismen van G. Elk analytisch automorphisme $\sigma \in A(G)$ bepaalt op zijn beurt een automorphisme $d\sigma$ van $\Lambda(G)$. De afbeelding $d\sigma$ is i.h.b. een lineaire transformatie van de eindig-dimensionale vectorruimte $\Lambda(G)$ in zichzelf.

Men controleert gemakkelijk dat de toevoeging $p \to d\rho_p$ een homomorphie is van G in de (multiplicative) groep van alle automorphismen van (G). M.a.w. , $p \to d\rho_p$ is een n-dimensionale representatie van G (waar n = dim G), de zog. geadjungeerde representatie van G.

De bijbehorende infinitesimale representatie van $\Lambda(G)$ wordt de geadjungeerde representatie van $\Lambda(G)$ genoemd en wordt aangegeven met ad. Men ziet eenvoudig dat

$$(\mathrm{ad}\ X)(Y) = [X,Y]$$

voor alle $X,Y \in \Lambda(G)$.

IV. 10. Eenledige ondergroepen. Kanonieke coördinaten. De exponentiele afbeelding.

Zij G een Lie-groep, en zij $X \in \Lambda(G)$, $X\neq 0$. Daar $[X,X]=0$ is de eendimensionale deelruimte Λ_o van $\Lambda(G)$ opgespannen door X een deelalgebra van $\Lambda(X)$. Bijgevolg (IV.8. stelling 2) is er een 1-dimensionale ondergroep H van G met Λ_o als Lie-algebra.

We kunnen dit ook als volgt inzien. Zij R de enkelvoudig samenhangende Lie-groep van alle reële getallen (additief); dan is $\Lambda(R)=R$ (vgl. IV.6). Nu is de afbeelding $t \to tX$ een homomorphisme van $\Lambda(R)$ in $\Lambda(G)$; uit IV.9. stelling 8 volgt dat er een analytische homomorphism van R in G bestaat. I.e. er is een analytische afbeelding $h:R \to G$ met

$$(*) \qquad h(t_1+t_2) = h(t_1)h(t_2)$$

voor alle reële $t_1,t_2 \in R$. Dan is $H=\{h(t): t\in R\}$ een 1-dimensionale ondergroep van G, met $\Lambda(H) = \Lambda_o$. Dikwijls noemt men de afbeelding h zelf een "eenledige ondergroep".

Men verifieert onmiddellijk dat de toevoeging

$$f \to \frac{d}{dt} f(h(t))\Big|_{t=0}$$

$(f\in\mathcal{A}(G))$ een raakvector aan H in e definieert. Daar $\Lambda(H) = \Lambda_o$ volgt

$$\frac{d}{dt} = \mathrm{const.}\ X_e.$$

Door in (*) de parameter met een constante te vermenigvuldigen kan men bereiken dat het verband tussen Λ_o en h gelegd wordt door

$$X_e = \frac{d}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{dh^i}{dt}\right]_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} .$$

Als $f \in \mathcal{A}_e(G)$, dan is nu

$$(Xf)(e) = X_e(f) = \left.\frac{df(h(t))}{dt}\right]_{t=0} .$$

Zij nu p een willekeurig punt uit het definitiegebied van f. Volgens definitie is

$$(Xf)(p) = X_p f = X_e f^p .$$

Zij (x^i) een toegelaten kartering in een omgeving van e; gemakshalve stellen we dat $e^1=e^2=\ldots=e^n=0$. Zij voorts ϕ de product-functie in deze kartering: $\phi=(\phi^i)_{i=1}^n$, met

$$\phi^i(x^1,x^2,\ldots,x^n;\ y^1,y^2,\ldots,y^n)=(x.y)^i .$$

Ter afkorting schrijven we λ^i voor $\left.\frac{dh^i}{dt}\right]_{t=0}$, en $\psi^i_j(x)$ voor

$$\psi^i_j(x^1,x^2,\ldots,x^n) = \frac{\partial \phi^i}{\partial y^j}(x^1,x^2,\ldots,x^n;0,0,\ldots,0).$$

Dan is

$$(Xf)(p) = X_e f^p = \frac{d}{dt} f^p(h(t))\Big]_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\ f(p.h(t))\Big]_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} . \psi^i_j(p). \lambda^j .$$

Bijgevolg kunnen we schrijven:

$$X = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda^i \psi^j_i(x) \frac{\partial}{\partial x^j} .$$

Op deze wijze hebben we laten zien hoe een willekeurige infinitesimale rechtstranslatie X in verband staat met de bijbehorende raakvector $X_e = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Als we nu voor f een van de coördinaat-functies nemen: $f(x^1,x^2,\ldots,x^n) = x^k$, dan vinden we:

$$(**) \qquad \frac{dh^k(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \, \psi_i^k \, (h(t)).$$

Bij een systematische opbouw van de theorie werkt men juist in tegengestelde richting: men bewijst stelling IV.8.2 door eerst het speciale geval van een 1-dimensionale deelalgebra van $\Lambda(G)$ te beschouwen, zeg voortgebracht door X, met

$$X_e = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i} .$$

Men bewijst dan dat het stelsel differentiaalvergelijkingen (**), met randvoorwaarde

$$h^k(o) = o$$

voor iedere keuze van $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$ een oplossing heeft, en dat deze oplossing altijd voldoet aan (*).

Zij nogmaals h(t) een éénledige ondergroep van G, met bijbehorende analytische rechtstranslatie X. Zij $f \in \mathcal{A}_e(G)$, en zij

$$F(t) = f(h(t)) = f(h^1(t), h^2(t), \ldots, h^n(t)).$$

Aangezien F een analytische functie is in t, kunnen we ontwikkelen in een Taylor-reeks:

$$F(t) = F(o) + tF'(o) + \frac{t^2}{2} F''(o) + \ldots$$

Dit levert:

$$f(h(t)) = f(e) + t(Xf)_e + \frac{t^2}{2!} (X^2 f)_e + \ldots$$

$$= (e^{tX} f)_e .$$

Daar een infinitesimale rechtstranslatie links-invariant is, volgt voor willekeurige p in het definitiegebied van f:

$$f^p(h(t)) = (e^{tX} f^p)(e) = (e^{tX} f)^p(e) =$$

$$= (e^{tX} f)(p);$$

dus

$$f(x \circ h(t)) = (e^{tX}f)(x).$$

Als $p \in G$, dan schrijven we τ_p voor de (globale) rechtstranslatie over p in G:

$$\tau_p(x) = x \circ p .$$

Dan kunnen we het bovenstaande ook in de volgende vorm schrijven:

$$e^{t \circ X} f = f \circ \tau_{h(t)}$$

en speciaal

$$e^X f = f \circ \tau_{h(1)} .$$

Men schrijft nu dikwijls $\exp(X)$ (en ook wel e^X) voor het element $h(1)$ van G; de afbeelding $X \to \exp(X)$ van $\Lambda(G)$ in G heet de <u>exponentiele afbeelding</u> (om de definitie te voltooien stellen we: $\exp(0) = e$).

Uit het voorgaande volgt onmiddellijk,

$$\exp\,(s+t)X = \exp(sX).\ \exp(tX)$$
$$\exp(-X) = (\exp X)^{-1}.$$

Aangezien de Lie-algebra $\Lambda(G)$ van een Lie-groep G een eindig-dimensionale vectorruimte is, kan op natuurlijke wijze een analytische structuur op $\Lambda(G)$ worden ingevoerd: neem een basis $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ in $\Lambda(G)$,
schrijf een willekeurige $X \in \Lambda(G)$ in de vorm

$$X = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n,$$

en kies $X \to (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ als (globale) kartering voor $\Lambda(G)$.
Het volgende blijkt nu te gelden:

<u>Stelling 1.</u> De afbeelding $X \to \exp X$ is een analytische afbeelding van $\Lambda(G)$ op G. Zelfs is er een open omgeving U van 0 in $\Lambda(G)$ die door $\exp$ 1-1-duidig op een open omgeving V van e in G wordt afgebeeld op

zodanige wijze dat de omkeerfunctie $V \to U$ ook analytisch is.

Een gevolgtrekking uit deze stelling is dat een hele omgeving van het eenheidselement in G (nl. V) wordt opgevuld door de éénledige ondergroepen van G. Dit feit speelt een belangrijke rol bij het onderzoek van de structuur van Lie-groepen.

Daar $\Lambda(G)$ analytisch isomorph is met de euclidische ruimte R^n ($n=\dim G$), kan men de analytisch omkeerbare analytische afbeelding $\exp|U:U \to V$ interpreteren als een kartering van de omgeving V van e. Deze kartering heeft de zeer aangename bijzondere eigenschap dat ten opzichte ervan de eenledige ondergroepen van G er uitzien als rechte lijnen: binnen V zijn de eenledige ondergroepen h(t) van de vorm

$$h(t) = (a^1 . t,\ a^2 . t, \dots, a^n . t),$$

waar $(a^1, a^2, \dots, a^n)$ de coördinaten van een zeker vast punt in V zijn. Een kartering met deze eigenschap heet een <u>kanoniek coördinatenstelsel van de eerste soort.</u> Voor de draaiingsgroep SO(3) is een kanonieke coördinatenstelsel van de eerste soort expliciet opgesteld in II.3.2: de parametrisering A.

Een <u>kanoniek coördinatenstelsel van de tweede soort</u> is een kartering (x^i) van een omgeving W van e in G met de volgende eigenschap: er zijn n eenledige ondergroepen $h_1, h_2, \dots, h_n$ van G zodanig dat voor willekeurige $x \in W$ geldt:

$$x = h_1(x^1) . h_2(x^2) . \dots . h_n(x^n).$$

Dat een dergelijk coördinatenstelsel altijd bestaat kan men gemakkelijk afleiden uit stelling 1; men beschouwe daartoe de analytische afbeelding van $\Lambda(G)$ in G, gedefinieerd door

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n \to$$

$$\to (\exp \alpha_1 X_1) . (\exp \alpha_2 X_2) . \dots . (\exp \alpha_n X_n)$$

(waar $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ een basis is voor $\Lambda(G)$); het blijkt dat deze afbeelding 1-1-duidig en analytisch omkeerbaar is op een voldoend kleine omgeving van 0 in $\Lambda(G)$. Voor h_i kan dan de eenledige ondergroep $t \to \exp(tX_i)$ genomen worden $(i=1,2,\ldots,n)$.

Voor de draaiingsgroep SO(3) is een kanoniek coördinatenstelsel van de tweede soort opgesteld in II.3.2.B (de parametervoorstelling van Euler). Voor de beperkte Lorentz groep $L_+^\uparrow$ wordt een "natuurlijk" kanoniek coördinatenstelsel van de tweede soort behandeld in I.M. GEL'FAND - R.A. MINLOS - Z.Ya. SHAPIRO, Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications, Part II, Chapter I, Section 2, §1. De corresponderende basis voor $\Lambda(G)$ is de basis behandeld is dit colloquium, III. 2.3.

IV. 11. De Lie-algebra's van een aantal lineaire Lie-groepen

We zagen in IV.6 dat de Lie-algebra van de volle lineaire groep $GL(n,C)$ geïdentificeerd kan worden met de matrix-algebra $M(n,C)$.

Zoals bekend kan men voor iedere $A \in M(n,C)$ definieren

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \ldots \quad ;$$

als $AB = BA$, dan is

$$e^A \circ e^B = e^{A+B}$$

en i.h.b. geldt

$$e^{sA} \circ e^{tA} = e^{(s+t)A} .$$

Blijkbaar is dus $t \to e^{tA}$ een éénledige ondergroep in $GL(n,C)$. Daar voorts

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA}$$

is A de infinitesimale transformatie corresponderend met deze eenledige ondergroep. De exponentiele afbeelding exp uit IV.10 valt dus samen met de afbeelding $A \to e^A$.

I.h.b. is er een omgeving U van de nulmatrix in $M(n,C)$ die door $A \to e^A$ topologisch wordt afgebeeld op een omgeving van I in $GL(n,C)$ (men kan dit overigens vlot direct aantonen).

<u>Definitie 1.</u> De ondergroep van $GL(n,C)$, bestaande uit alle

<u>reële matrices</u>	geven we aan met	$GL(n,R)$;
<u>unimodulaire matrices</u>	" " " "	$SL(n,C)$;
<u>unitaire matrices</u>	" " " "	$U(n)$;
<u>orthogonale matrices</u>	" " " "	$O(n,C)$;

voorts schrijven we

$SL(n,R)$	voor	$GL(n,R) \cap SL(n,C)$;
$O(n)$	"	$GL(n,R) \cap O(n,C)$;
$SU(n)$	"	$U(n) \cap SL(n,C)$;
$SO(n)$	"	$O(n) \cap SL(n,C)$.

<u>Definitie 2.</u> De deelalgebra van de Lie-algebra $M(n,C)$, bestaande uit alle

<u>reële matrices</u>	geven we aan met	$M(n,R)$;
<u>matrices met spoor 0</u>	" " " "	$SM(n,C)$;
<u>scheef-hermitische matrices</u>	" " " "	$M^{sh}(n)$;
<u>scheef-symmetrische matrices</u>	" " " "	$M^{ss}(n,C)$.

Voorts schrijven we

$SM(n,R)$	voor	$SM(n,C) \cap M(n,R)$;
$M^{ss}(n,R)$	"	$M^{ss}(n,C) \cap M(n,R)$;
$SM^{sh}(n)$	"	$SM(n,C) \cap M^{sh}(n)$;
$M^{sh}(n,R)$	"	$M(n,R) \cap M^{sh}(n,C)$;
$SM^{ss}(n)$	"	$SM(n,C) \cap M^{ss}(n,R)$.

Het is bekend dat, voor willekeurige $n \times n$-matrices A,

$$\det (e^A) = e^{\text{spoor } A}.$$

Zij nu U een omgeving van de nulmatrix in $M(n,C)$ zodanig dat de afbeelding $A \to e^A$ U topologisch afbeeldt op een omgeving van de eenheidsmatrix I in $GL(n,C)$, en bovendien zodanig dat

$$|\text{spoor } A| < 2\pi \quad \text{voor alle } A \in U;$$

$$A \in U \Longrightarrow -A \in U,\ A^T \in U,\ \bar{A} \in U.$$

Dan ziet men eenvoudig dat de exponentiele afbeelding de verzamelingen $SM(n,C)\cap U$, $M^{sh}(n)\cap U$, $SM^{sh}(n)\cap U$, $M(n,R)\cap U$, $SM(n,R)\cap U$, $M^{sh}(n,R)\cap U$, $SM^{sh}(n,R)\cap U$, $M^{ss}(n)\cap U$ respectievelijk topologisch (zelfs analytisch, met analytische omkering) afbeeldt op omgevingen van I in de groepen SL(n,C), U(n), SU(n), GL(n,R), SL(n,R), O(n), SO(n), O(n,C).

Hieruit concludeert men tot de volgende correspondentie tussen klassieke lineaire groepen en Lie-algebra's (volledigheidshalve geven we ook de dimensies aan):

Lineaire groep	Lie-algebra	dimensie
GL(n,C)	M(n,C)	$2n^2$
GL(n,R)	M(n,R)	n^2
SL(n,C)	SM(n,C)	$2n^2-2$
SL(n,R)	SM(n,R)	n^2-1
U(n)	$M^{sh}(n)$	n^2
SU(n)	$SM^{sh}(n)$	n^2-1
O(n,C)	$M^{ss}(n,C)$	$n(n-1)$
O(n)	$M^{ss}(n,R)$	$\frac{1}{2}n(n-1)$
SO(n)	$SM^{ss}(n)$	$\frac{1}{2}n(n-1)$

Voor de Lie-algebra van $L_+^\uparrow$ verwijzen we naar III.2.3.

Tot de klassieke groepen behoren ook de zog. symplectische groepen.

Definitie 3. De symplectische groep Sp(n) is de groep van alle automorphieën van de n-dimensionale lineaire ruimte over het lichaam der quaternionen die de volgende quadratische vorm invariant laten:

$$x.y = \bar{x}_1.y_1 + \bar{x}_2.y_2 +\ldots+ \bar{x}_n.y_n$$

(als q een quaternion is, $q=a+bi+cj+dk$, dan is $\bar{q}=a-bi-cj-dk$).

Ieder quaternion $q=a+bi+cj+dk$ kan worden geschreven in de vorm

$$q = a+bi+j(c+di) = q_1+jq_2$$

waar we q_1 en q_2 kunnen beschouwen als complexe getallen. Op deze wijze kan Q^n in 1-1-correspondentie worden gebracht met C^{2n} op zodanige wijze dat Sp(n) isomorph wordt ingebed in GL(2n,C), nl. als de ondergroep van GL(2n,C) bestaande uit alle unitaire matrices die de bilineaire vorm

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+n} - x_{i+n} y_i)$$

invariant laten.

Derhalve is Sp(n), als gesloten ondergroep van GL(2n,C), een Lie-groep.

De <u>complexe symplectische groep</u> Sp(n,C) is per definitie de ondergroep van GL(2n,C) bestaande uit <u>alle</u> matrices die de quadratische vorm

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+n} - x_{i+n} y_i)$$

invariant laten (zodoende is $Sp(n) = Sp(n,C) \cap U(2n)$).
Er geldt:

$$\dim Sp(n,C) = 2(2n^2+n),$$
$$\dim Sp(n) = 2n^2+n.$$

De Lie-algebra van Sp(n,C) is de deelalgebra van M(2n,C) bestaande uit alle matrices X waarvoor

$$JX + X^T J = 0,$$

met

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$